Continuación 5: Teorema de valor medio e integrabilidad de funciones discontinuas

Teorema 1. *Supóngase que f es integrable sobre $[a, b]$ y que $m \leq f(x) \leq M \quad \forall \quad x \in [a, b]$. Entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Demostración. Si $m = inf\{f(x)|x \in [a, b]\}$, $M = sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$ y $m \leq f(x) \leq M$ entonces se tiene que

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

□

Teorema 2. *Si f es integrable en [a,b] y $m \leq f(x) \leq M$ para todo x de [a,b] entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\mu$$

para un cierto μ con $m \leq \mu \leq M$

Demostración. Tenemos por lo demostrado anteriormente que

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M \Rightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

□

Teorema 3. *Si f es continua en [a,b] entonces*

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

para un cierto $\xi \in [a, b]$

Demostración. Si m y M son los valores máximo y mínimo de f sobre [a,b] al ser f continua alcanza todos los valores y por lo tanto $f(\xi) = \mu$ por lo tanto

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

□

Teorema 4. *Supóngase que f es una función continua en [a,b] y que g es una función integrable y no negativa en [a,b]. Demostrar que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

con $\xi \in [a, b]$

Demostración. Tenemos que si m M son respectivamente los valores máximo y mínimo de f sobre [a,b], se tiene que

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)$$

en consecuencia

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)} \leq M$$

Por lo tanto existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)}$$

Por lo tanto

$$f(\xi)\int_a^b g(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

□

Vamos a probar que $2 < \int_1^5 \frac{x^2}{x^2+1}dx < \frac{50}{13}$
Si $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ Tenemos entonces que $\int_1^5 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}(5-1)$
con $1 \leq \alpha \leq 5$.
Ahora bien

$$1 \leq \alpha \Rightarrow 1^2 \leq \alpha^2 \Rightarrow 1^2+1 \leq \alpha^2+1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2+1} \leq \frac{1}{1^2+1}$$

$$\alpha \leq 5 \Rightarrow \alpha^2 \leq 5^2 \Rightarrow \alpha^2+1 \leq 5^2+1 \Rightarrow \frac{1}{5^2+1} \leq \frac{1}{\alpha^2+1}$$

Por lo tanto

$$1-\frac{1}{1^2+1} < 1-\frac{1}{\alpha^2+1} < 1-\frac{1}{5^2+1} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} < \frac{25}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(5-1) < \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}(5-1) < \frac{25}{26}(5-1) \Rightarrow 2 < \int_1^5 \frac{x^2}{x^2+1}dx < \frac{50}{13}$$

Utilizar lo anterior para mostrar que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \frac{1}{7}$$

elegimos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ y $g(x) = x^6$

Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7\sqrt{1+\xi^2}}$$

como $0 \leq \xi \leq 1$ entonces

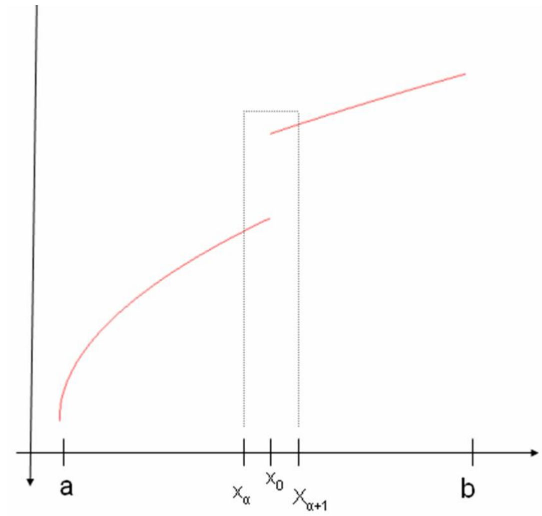
$$\frac{1}{7\sqrt{1+1^2}} \leq \frac{1}{7\sqrt{1+\xi^2}} \leq \frac{1}{7\sqrt{1+0^2}}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \frac{1}{7}$$

Teorema 5. *Sea $f : [a,b] \to R$ f acotada en [a,b]. Si f es continua en [a,b], excepto en un punto entonces f es integrable en [a,b].*

Demostración. Suppongamos que $x_0 \in [a,b]$ tal que f es discontinua en x_0



Sean x_α, $x_{\alpha+1} \in [a,b]$ tal que $x_0 \in (x_\alpha, x_{\alpha+1})$ y $x_{\alpha+1} - x_\alpha < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$. Como f es continua en $[a, x_\alpha]$ y $[x_{\alpha+1}, b]$ f es uniformemente continua por lo tanto f es integrable en $[a, x_\alpha]$ y $[x_{\alpha+1}, b]$

Construimos P=$\{x_0, x_1, ..., x_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_n\}$ y tenemos entonces que

$$U(f,p) - L(f,p) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + (M_\alpha - m_\alpha)(x_\alpha - x_{\alpha+1}) + \sum_{i=\alpha+1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i+1})$$

Para el primer sumando tenemos que f es continua por lo tanto integrable por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\alpha}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{4(b-a)}\sum_{i=1}^{\alpha}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{4}$$

Para el segundo sumando

$$(M_\alpha - m_\alpha)(x_\alpha - x_{\alpha+1}) \leq (M-m)(x_\alpha - x_{\alpha+1}) < (M-m)\frac{\epsilon}{2(M-m)} = \frac{\epsilon}{2}$$

Para el tercer sumando, usamos el hecho de que f es continua e integrable en $[x_{\alpha+1}, b]$

$$\sum_{i=\alpha+1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i+1}) < \sum_{i=\alpha+1}^{n}\frac{\epsilon}{4(b-a)}(x_i - x_{i+1}) = \frac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{4}$$

Por lo tanto

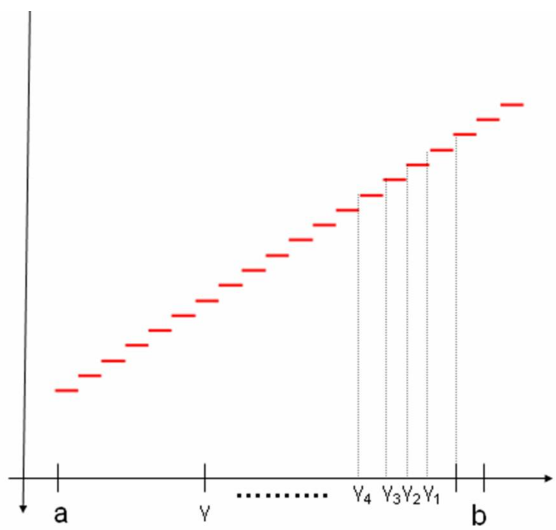
$$\overline{S}(f,p) - \underline{S}(f,p) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

Por lo tanto f es integrable en todo [a,b] □

Teorema 6. *Sea $f : [a,b] \to R$, f acotada en [a,b], si f es continua en [a,b] excepto en un conjunto finito de puntos, entonces f es integrable.*

¿Que pasa con una función con una cantidad infinita de discontinuidades?

Por ejemplo una función que es discontinua en una sucesión convergente de puntos del dominio de la función



Sea $\{\gamma_n\} n \in N$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f, que forma una sucesión convergente a γ, en donde $\gamma_i \in [a,b]$ para toda i=1,2,...,n como $\{\gamma_n\} \to \gamma$, entonces:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \dagger \forall K > N \Rightarrow |\gamma_k - \gamma| < \epsilon$$

es decir, que una infinidad de términos estaria encerrada en un intervalo tan pequeño como queramos y fuera de él solo quedaría un número finito de términos de la sucesión; y por tanto todos los puntos en donde la función es discontinua (la sucesión), estarian encerrados en un número finito de subintervalos.

Teorema 7. *sea $f : [a,b] \to R$ f acotada en [a,b] si f es continua en [a,b], excepto en un conjunto de discontinuidades que puede ser encerrado en un número finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos, entonces f es integrable en [a,b].*

Definición 1. *Se dice que en un conjunto $A \subset B$ tiene contenido cero si $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ intervalos $I_1, I_2, ..., I_n$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ y tales que $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) < \epsilon$*

Teorema 8. *Sea $f : [a,b] \to R$, f acotada en [a,b] y si f es continua en [a,b], excepto en un conjunto de contenido cero, entonces f es integrable en [a,b].*