1

Métodos de Integración

Método de Alemán

Este método se utiliza para encontrar la integral de funciones del tipo

$$\int \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

donde el numerador es un polinomio de grado n.
Para calcular la integral

$$\int \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

consideremos la igualdad

$$\int \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = (b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

es decir, el polinomio que aparece en el lado derecho de la igualdad es un polinomio de grado n-1. Ahora hay que determinar los valores b_i con $i = 1, 2, \cdots, n$ y el valor de λ. Para esto derivamos ambos lados de la igualdad obteniendo

$$\frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}\left((b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)$$

$$= \left(((n-1)b_{n-1}x^{n-2}+(n-2)b_{n-2}x^{n-3}+\cdots+b_1)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+$$

$$\left((b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

tomando denominador común

$$\frac{(2(n-1)b_{n-1}x^{n-2}+(n-2)b_{n-2}x^{n-3}+\cdots+b_1)(ax^2+bx+c)+(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$+\frac{2\lambda}{2\sqrt{ax^2+dx+c}}$$

por lo tanto

$$\frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2((n-1)b_{n-1}x^{n-2}+(n-2)b_{n-2}x^{n-3}+\cdots+b_1)(ax^2+bx+c)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+$$

$$\frac{(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1)(2ax+b)+2\lambda}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

esto es

$$2\left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\right) = 2\left((n-1)b_{n-1}x^{n-2} + (n-2)b_{n-2}x^{n-3} + \cdots + b_1)(ax^2+bx+c)\right) +$$

$$\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0\right)(2ax+b) + 2\lambda$$

y ahora se igualan los coeficientes de las potencias de x, formando así un sistema de ecuaciones.
Ejemplo.-Calcular $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$
Para esto se establece la igualdad

$$\int \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+x+2} + \lambda\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$$

se deriva la igualdad

$$\frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+x+2} + (Ax^2+Bx+C)\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+2}}$$

de donde

$$2(x^3+2x-1) = 2(2Ax+B)(x^2+x+2) + (Ax^2+Bx+C)(2x+1) + 2\lambda$$

simplificando tenemos

$$2x^3+4x-2 = 4Ax^3+4Ax^2+8Ax+2Bx^2+2Bx+4B+2Ax^3+Ax^2+2Bx^2+Bx+2Cx+C+2\lambda$$

$$= 6Ax^3+5Ax^2+8Ax+4Bx^2+3Bx+4B+2Cx+C+2\lambda = 6Ax^3+(5A+4B)x^2+(8A+3B+2C)x+4B+C+2\lambda$$

Establecemos el sistema de ecuaciones

$$6A = 2 \quad 5A+4B = 0 \quad 8A+3B+2C = 4 \quad 4B+C+2\lambda = -2$$

de donde

$$A = \frac{1}{3} \quad B = \frac{-5}{12} \quad C = \frac{31}{24} \quad \lambda = \frac{-13}{16}$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{31}{24}\right)\sqrt{x^2+x+2} - \frac{13}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$$

y ahora solo falta calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$$

para ello escribimos

$$x^2+x+2 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{7}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

y utilizamos la sustitución trigonometrica

$$x+\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{7}{4}}\tan t$$

de donde

$$dx = \sqrt{\frac{7}{4}}\sec^2 t\ dt$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} = \int \frac{\sqrt{\frac{7}{4}}\sec^2 t\ dt}{\sqrt{\frac{7}{4}\tan^2 t + \frac{7}{4}}} = \int \frac{\sec^2 t}{\sec\ t} dt = \int \sec\ t\, dt = \ln|\tan\ t + \sec\ t| + C = \ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + \frac{\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right| =$$

$$\ln\left|\frac{2x+1+2\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{7}}\right|$$

$$\int \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{31}{24}\right)\sqrt{x^2+x+2} - \frac{13}{16}\ln\left|\frac{2x+1+2\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{7}}\right| + C$$