1

Métodos de Integración

Integrales Binomiales

Las integrales binomiales son de la forma

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

con $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $m,n,p \in \mathbb{Q}$, tienen primitiva expresada por funciones elementales sólo en uno de los siguientes casos

$$p \in \mathbb{Z} \qquad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \qquad \frac{m+1}{n}+p \in \mathbb{Z}$$

Esto es llamado el Teorema de Chebychev sobre diferenciales binomiales.
Integrales que no tienen una primitiva expresada por funciones elementales
Ejemplo.-

$$\int \sqrt{1+x^4}\; dx$$

no tiene este tipo de primitiva ya que $m=0, \quad n=4, \quad p=\frac{1}{2}$ por tanto

$$p=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \qquad \frac{m+1}{n}=\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z} \qquad \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$$

Ninguna de las condiciones del Teorema de Chevichev se cumple, entonces no hay una primitiva expresada por funciones elementales.
Otras funciones "sin primitiva"

$$\int e^{-x^2}\; dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}\; dx, \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\; dx, \qquad \int \sqrt{1-b\operatorname{sen}^2 x}\; dx \quad b>0,\; b\neq 1, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

Ejemplos.-Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}}$
Como $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}}$ es una integral de la forma

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

donde $m=-1$, $n=1$, $p=\dfrac{-1}{2}$ entonces $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1+1}{1}=0 \in \mathbb{Z}$
hacemos el cambio de variable

$$\sqrt{2x+4}=t \quad \Rightarrow \quad 2x+4=t^2 \quad \Rightarrow \quad 2x=t^2-4 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{t^2-4}{2}$$

de donde

$$dx = \frac{2t}{2}dt = t\ dt$$

Así

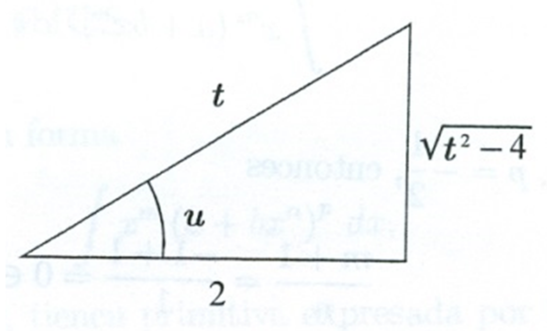
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}} = \int \frac{t}{\left(\frac{t^2-4}{2}\right)t}dt = \int \frac{2}{t^2-4}dt$$

hacemos el cambio de variable

$$\int \frac{2}{t^2-4}dt \underbrace{=}_{\substack{t=2\sec\ u \\ dt=2\sec\ u\ \tan\ u\ du}} 2\int \frac{2\sec\ u\ \tan\ u}{4\sec^2 u - 4}du = \int \frac{\sec\ u\ \tan\ u}{\tan^2 u}du = \int \frac{\sec\ u}{\tan\ u}du = \int \frac{du}{\text{sen}\ u} = \int \csc\ u\, du$$

$$= -\ln|\csc\ u + \cot\ u| + C$$

Utilizamos el siguiente triángulo para ecribir a csc u y cot u en función de t



de donde

$$-\ln|\csc\ u + \cot\ u| + C = -\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \frac{2}{\sqrt{t^2-4}}\right| + C$$

si $t = \sqrt{2x+4}$ entonces

$$-\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \frac{2}{\sqrt{t^2-4}}\right| + C = -\ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{(\sqrt{2x+4})^2-4}} + \frac{2}{\sqrt{(\sqrt{2x+4})^2-4}}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}+2}{\sqrt{2x}}\right| + C$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}} = -\ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}+2}{\sqrt{2x}}\right| + C$$