1

Métodos de Integración

Sustitución $u = \tan \frac{x}{2}$

En las integrales de la forma

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$$

donde R es una función racional de dos variables, se puede reducir mediante la sustitución

$$u = \tan \frac{x}{2}$$

a integrales de la forma

$$\int r(u)\ du$$

donde r es una función racional de una variable.

Ejemplo.-Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\ x + \cos\ x}$

Para esto hacemos el cambio de variable $u = \tan \frac{x}{2}$, de donde

$$x = 2 \arctan\ u \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

Utilizando las identidades trigonométricas tenemos

$$\tan^2\ \frac{x}{2} + 1 = \sec^2\ \frac{x}{2} \qquad es\ \ decir \qquad u^2 + 1 = \sec^2\ \frac{x}{2}$$

Además

$$\operatorname{sen}\ x = 2\ \operatorname{sen}\ \frac{x}{2}\ \cos\ \frac{x}{2} = \frac{2\ \operatorname{sen}\ \frac{x}{2}\ \cos\ \frac{x}{2}\ \cos\ \frac{x}{2}}{\cos\ \frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{sen}\ \frac{x}{2}}{\cos\ \frac{x}{2}}\cos^2\ \frac{x}{2} = \frac{2\tan\ \frac{x}{2}}{\sec^2\ \frac{x}{2}} = \frac{2u}{u^2+1}$$

mientras que

$$\cos\ x = 2\ \cos^2\ \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2\ \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{u^2+1} - 1 = \frac{2-u^2-1}{u^2-1} = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

de donde

$$\operatorname{sen}\ x + \cos\ x = \frac{2u}{u^2+1} + \frac{1-u^2}{u^2+1} = \frac{-u^2+2u+1}{u^2+1} = \frac{-(u^2-2u-1)}{u^2-1}$$

Así la integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\ x + \cos\ x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{\frac{-(u^2-2u-1)}{u^2+1}}du = \int \frac{-2}{u^2-2u-1}du = -2\int \frac{du}{u^2-2u-1}$$

Para calcular ésta última integral factorizamos u^2-2u-1:

$$u^2-2u-1=u^2-2u+1-1-1=(u-1)^2-2=(u-1-\sqrt{2})(u-1+\sqrt{2})$$

hacemos

$$a=1+\sqrt{2} \quad y \quad b=1-\sqrt{2}$$

y entonces

$$u^2-2u-1=(u-a)(u-b)$$

de donde

$$\frac{1}{u^2-2u-1}=\frac{1}{(u-a)(u-b)}=\frac{A}{u-a}+\frac{B}{u-b}$$

Así

$$1=A(u-b)+B(u-a) \quad \Rightarrow \quad 1=(A+B)u-bA-aB$$

Formamos el sistema

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ -bA-aB&=1 \end{aligned}$$

Despejamos A de la primera y tenemos $A=-B$ y sustituimos en la segunda

$$-b(-B)-aB=1 \quad \Rightarrow \quad (b-a)B=1 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{1}{b-a}$$

De manera que

$$A=-B=\frac{-1}{b-a}$$

Así

$$-2\int\frac{du}{u^2-2u-1}=-2\left(\frac{1}{b-a}\int\frac{-du}{u-a}+\frac{1}{b-a}\int\frac{du}{u-b}\right)=$$

$$=\frac{-2}{b-a}\left(-\int\frac{du}{u-a}+\int\frac{du}{u-b}\right)=\frac{-2}{b-a}(-\ln|u-a|+\ln|u-b|)+C=\frac{-2}{b-a}\ln\left|\frac{u-b}{u-a}\right|+C$$

como $b-a=1-\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ entonces

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}\ x+\cos\ x}=-2\int\frac{du}{u^2-2u-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1+\sqrt{2}}{u-1-\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\ \frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\ \frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$$