1

Métodos de Integración

Integrales de potencias de las funciones trigonométricas

Teorema 1. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

Demostración. Dado que $\operatorname{sen}^n x = \left(\operatorname{sen}^{n-1} x\right)(\operatorname{sen} x)$, escogiendo $u(x) = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $v'(x) = \operatorname{sen} x$, se tiene

$$\begin{array}{c} u(x) = \operatorname{sen}^{n-1} x \;\Rightarrow\; u'(x) = (n-1)\left(\operatorname{sen}^{n-2} x\right)(\cos x) \\ v'(x) = \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; v(x) = \int v'(x)\, dx = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \end{array}$$

Por tanto aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\left(\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\, dx\right) = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\left(\int \operatorname{sen}^{n-2} x - \operatorname{sen}^n x)\, dx\right) =$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

por lo tanto

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx + (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

$$\left(\int \operatorname{sen}^n x\, dx\right)(1+n-1) = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

$\square$

Ejemplo.-Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

Aplicando la fórmula se tiene

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{-\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{-\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{1}{2}x + C$$

Teorema 2. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\int \cos^n x\ dx = \frac{\cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\ dx$$

Demostración. Dado que $\cos^n x = \left(\cos^{n-1} x\right)(\cos x)$, escogiendo $u(x) = \cos^{n-1} x$ y $v'(x) = \cos x$, se tiene

$$u(x) = \cos^{n-1} x \ \Rightarrow\ u'(x) = (n-1)\left(\cos^{n-2} x\right)(-\operatorname{sen} x)$$
$$v'(x) = \cos x \ \Rightarrow\ v(x) = \int v'(x)\ dx = \int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x$$

Por tanto aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int \cos^n x\ dx = \int \cos^{n-1} x\ \cos x\ dx = \cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\ \operatorname{sen}^2 x\ dx$$

$$= \cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + (n-1)\left(\int \cos^{n-2} x\ (1-\cos^2 x)\ dx\right) = \cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + (n-1)\left(\int \cos^{n-2} x\ - \cos^n x)\ dx\right) =$$

$$= \cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\ dx - (n-1)\int \cos^n x\ dx$$

por lo tanto

$$\int \cos^n x\ dx = \cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\ dx - (n-1)\int \cos^n x\ dx$$

$$\int \cos^n x\ dx + (n-1)\int \cos^n x\ dx = \cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\ dx$$

$$\left(\int \cos^n x\ dx\right)(1+n-1) = \cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\ dx$$

$$\int \cos^n x\ dx = \frac{\cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{n-2} x\ dx$$

□

Ejemplo.-Calcular $\int \cos^3 x\ dx$

Aplicando la fórmula se tiene

$$\int \cos^3 x\ dx = \frac{\cos^2 x\ \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\ dx = \frac{\cos^2 x\ \operatorname{sen} x}{2} + \frac{2}{3}(\operatorname{sen} x) + C$$

Teorema 3. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\int \tan^n \; x \; dx = \begin{cases} \ln|\sec \; x| + C & n = 1 \\ \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \; dx & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo.-Calcular $\int \tan^2 x \; dx$
Aplicando la fórmula se tiene

$$\int \tan^2 x \; dx = \frac{\tan \; x}{1} - \int dx = \tan \; x - x + C$$

Teorema 4. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\int \cot^n \; x \; dx = \begin{cases} \ln|\text{sen} \; x| + C & n = 1 \\ \frac{-\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \; dx & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo.-Calcular $\int \cot^3 x \; dx$
Aplicando la fórmula se tiene

$$\int \cot^3 x \; dx = -\frac{\cot^2 \; x}{2} - \int \cot \; x \; dx = -\frac{\cot^2 \; x}{2} - \ln|\text{sen} \; x| + C$$

Teorema 5. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\int \sec^n \; x \; dx = \begin{cases} \ln|\sec \; x + \tan \; x| + C & n = 1 \\ \frac{\sec^{n-2} x \; \tan \; x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \; dx & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo.-Calcular $\int \sec^4 x \; dx$
Aplicando la fórmula se tiene

$$\int \sec^4 x \; dx = \frac{\sec^2 \; x \tan \; x}{3} + \frac{2}{3} \int \sec^2 \; x \; dx = \frac{\sec^2 \; x \tan \; x}{3} + \frac{2}{3} \tan \; x + C$$

Teorema 6. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\int \csc^n \; x \; dx = \begin{cases} \ln|\csc \; x - \cot \; x| + C & n = 1 \\ -\frac{\csc^{n-2} x \; \cot \; x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x \; dx & n \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo.-Calcular $\int \csc^3 x \; dx$
Aplicando la fórmula se tiene

$$\int \csc^3 x \; dx = -\frac{\csc \; x \cot \; x}{2} + \frac{1}{2} \int \csc \; x \; dx = -\frac{\csc^2 \; x \cot \; x}{2} + \frac{1}{2} \ln|\csc \; x - \cot \; x| + C$$