1

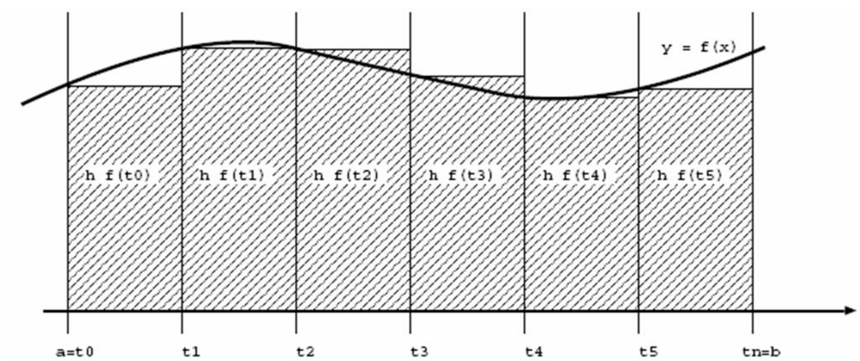
Métodos Numéricos de Integración

Método del Rectángulo

El método del rectángulo es el siguiente:
Para $n \in \mathbb{N}$, particionamos el intervalo [a,b] en n subintervalos de igual longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$ es decir $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ con $t_i = a + ih$ y aproximamos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})h$$

Es decir, aproximamos cada integral en $[t_{i-1}, t_i]$ por el área del rectángulo de base h y altura $f(t_{i-1})$,



En otras palabras, calculamos la integral de la función que en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ es constantemente igual a $f(t_{i-1})$

llamamos $I_n = h\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})$ y ya hemos visto que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_a^b f(x)dx$$

desde luego hay un error cuando calculamos aproximadamente. Lo que nos preguntamos ahora es si podemos medir o estimar el error cometido al calcular I_n.

Teorema 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con primera derivada continua en [a,b]. Si $M_1 = \underbrace{Máx}_{[a,b]} |f'|$, entonces*

$$\left| I_n - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n}$$

Demostración. tenemos que

$$\left|I_n - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(hf(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|hf(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx\right| =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t_{i-1})dx - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t_{i-1}) - f(x))dx\right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t_{i-1}) - f(x)|\, dx$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$f(x) - f(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{x} f'(t)dt$$

se tiene entonces que

$$|f(x) - f(t_{i-1})| = \left|\int_{t_{i-1}}^{x} f'(t)dt\right| \leq \int_{t_{i-1}}^{x} |f'(t)|dt \leq \int_{t_{i-1}}^{x} M_1 dt = M_1(x - t_{i-1})$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t_{i-1}) - f(x)|\, dx \leq \int_{t_{i-1}}^{x} M_1 \underbrace{(x - t_{i-1})}_{\substack{u=x-t_{i-1}\\ du=dx}} dx = M_1 \underbrace{\int_0^h}_{\substack{x=t_{i-1}\Rightarrow u=0\\ x=t_i\Rightarrow u=h}} udu = M_1\frac{u^2}{2}\Big|_0^h = M_1\frac{h^2}{2}$$

Por tanto

$$\left|I_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t_{i-1}) - f(x)|\, dx \leq \sum_{i=1}^{n} M_1\frac{h^2}{2} = nM_1\frac{h^2}{2} =$$

$$nM_1\frac{(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M_1}{2}\frac{(b-a)^2}{n}$$

□

Observación. Si conocemos una cota para M_1, entonces podemos saber cuál es el valor de n que debe tomarse para calcular la integral aproximada con un error dado.

Ejemplo 1. Supongamos que queremos calcular aproximadamente $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ con un error menor a 0.1

tenemos que $f(x) = e^{-x^2}$ por tanto $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ y deducimos que $|f'(x)| \leq 4$ para $x \in [0,2]$ por tanto para $n \in (N)$

$$\left|I_{nr} - \int_0^2 e^{-x^2}dx\right| \leq \frac{4}{2}\frac{2^2}{n} = \frac{8}{n}$$

y para asegurar un valor $< 0{,}1$

$$\frac{8}{n} < 0{,}1 \Rightarrow \frac{8}{0{,}1} < n \Rightarrow 80 < n$$

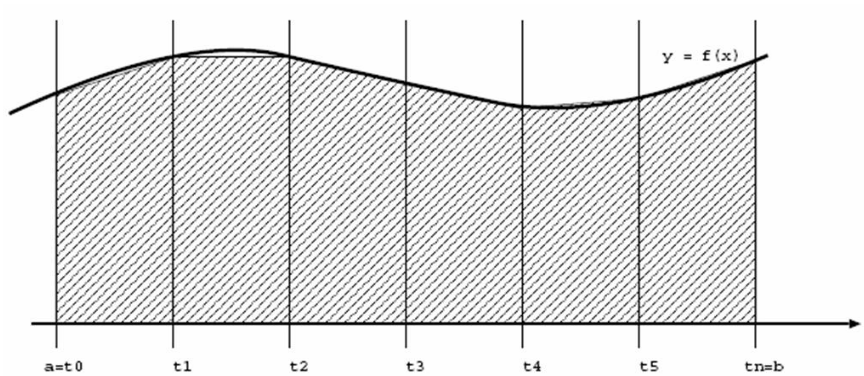
Para n=80 la fórmula nos da $I_{nr} = 0{,}89435$
En maple obtenemos 0,8820813910

Método del Trapecio

La regla del trapecio es la siguiente:
Para $n \in \mathbb{N}$ particionamos (de la misma manera que antes)$P = \{a = t_o, t_1, ..., t_n = b\}$ con $t_i = a + ih$ y aproximamos

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{nt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2}(t_i - t_{i-1})$$

Es decir, aproximamos cada integral en $[t_{i-1}, t_i]$ por el área del trapecio de altura h y bases $f(t_{i-1})$ y $f(t_i)$



En otras palabras, calculamos la integral de la función que en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ es lineal y coincide con f en t_{i-1} y en t_i

Teorema 2. *(Estimación del error de la regla del trapecio). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada continua en [a,b]. Si $M_2 = Máx_{[a,b]}|f''|$, entonces*

$$\left| I_{nt} - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M_2}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

Demostración. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ dada así $P = \left\{ a, \left(\frac{b-a}{n} \right), a + 2\left(\frac{b-a}{n} \right), \cdots, a + n\left(\frac{b-a}{n} \right) \right\}$
si llamo $h = \dfrac{b-a}{n}$ tenemos entonces que $P = \{a, a + h, a + 2h, \cdots, a + nh = b\}$
ahora llamamos $a_k = a + (k-1)h$ y $a_k + t = a + (k-1)h + t$ donde $t \in [0, h]$.
Definimos

$$\varphi(t) = \int_{a_k}^{a_k+t} f(x)\ dx - \frac{f(a_k) + f(a_k + t)}{2} t$$

Derivemos $\varphi(t)$

$$\varphi'(t) = f(a_k + t) - \frac{f(a_k)}{2} - \frac{f(a_k + t)}{2} - t\frac{f'(a_k + t)}{2}$$

donde $\varphi'(0) = 0$
volvemos a derivar

$$\varphi''(t) = f'(a_k + t) - \frac{f'(a_k + t)}{2} - \frac{f''(a_k + t)}{2}t - \frac{f'(a_k + t)}{2} = -\frac{f''(a_k + t)}{2}t$$

por tanto
$$\varphi''(t) = -\frac{f''(a_k+t)}{2}t$$
Como $f''(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces existen m, M tales que
$$m \leq f''(a_k+t) \leq M \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2} \leq \frac{f''(a_k+t)}{2} \leq \frac{M}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}t \leq \frac{f''(a_k+t)}{2}t \leq \frac{M}{2}t$$
$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}t \leq -\varphi''(t) \leq \frac{M}{2}t$$
vamos a intagrar esta última desigualdad
$$\int \frac{m}{2}t \leq -\int \varphi''(t) \leq \int \frac{M}{2}t \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\frac{t^2}{2} \leq -\varphi'(t) \leq \frac{M}{2}\frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{4}t^2 \leq -\varphi'(t) \leq \frac{M}{4}t^2$$
volvemos a integrar esta última desigualdad
$$\int \frac{m}{4}t^2 \leq -\int \varphi'(t) \leq \int \frac{M}{4}t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{12}t^3 \leq -\varphi(t) \leq \frac{M}{12}t^3$$
como
$$-\varphi(t) = -\left(\int_{a_k}^{a_k+t} f(x)\ dx - \frac{f(a_k)+f(a_k+t)}{2}t\right) = \frac{f(a_k)+f(a_k+t)}{2}t - \int_{a_k}^{a_k+t} f(x)\ dx$$
entonces
$$\frac{m}{12}t^3 \leq \frac{f(a_k)+f(a_k+t)}{2}t - \int_{a_k}^{a_k+t} f(x)\ dx \leq \frac{M}{12}t^3$$
tomando $t = h$
$$\frac{m}{12}h^3 \leq \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}t - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\ dx \leq \frac{M}{12}h^3$$
tomando la suma desde $k = 1$ hasta n
$$n\frac{m}{12}h^3 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}t - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\ dx\right) \leq n\frac{M}{12}h^3$$
ahora bien como $M_2 = m\acute{a}x_{[a,b]}|f''(x)|$ entonces
$$n\frac{-M_2}{12}h^3 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}t - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\ dx\right) \leq n\frac{M_2}{12}h^3$$
por tanto
$$n\frac{-M_2}{12}h^3 \leq I_{nt} - \int_a^b f(x)dx \leq n\frac{M_2}{12}h^3$$
como $h = \dfrac{b-a}{n}$ se tiene que
$$n\frac{-M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \leq I_{nt} - \int_a^b f(x)dx \leq n\frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$$

por lo tanto

$$n\frac{-M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3} \leq I_{nt} - \int_a^b f(x)dx \leq n\frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}$$

y por lo tanto

$$\left| I_{nt} - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

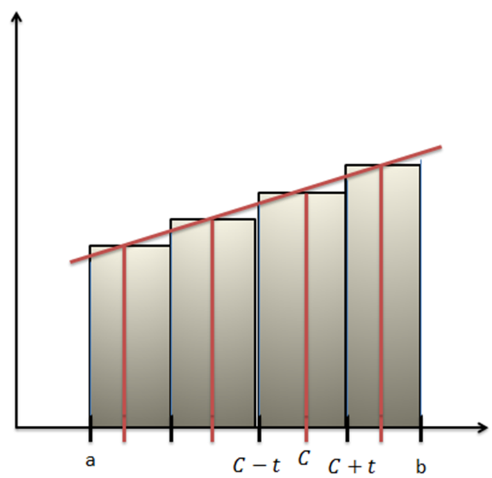
$\square$

Método del Punto Medio

La regla del punto mdio es la siguiente:
Para $n \in \mathbb{N}$ particionamos (de la misma manera que antes)$P = \{a = t_o, t_1, ..., t_n = b\}$ con $t_i = a + ih$ y aproximamos

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{nm} = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (2i-1)\frac{h}{2}\right)(h)$$

Es decir, aproximamos cada integral en $[t_{i-1}, t_i]$ por el área del rectángulo de altura $f(C_i)$ y base $t_i - t_{i-1}$



En otras palabras, calculamos la integral de la función que en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ es constante y coincide con f en $C_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Teorema 3. *(Estimación del error de la regla del punto medio). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada continua en [a,b]. Si $M_3 = Máx_{[a,b]}|f''|$, entonces*

$$\left| I_{npm} - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M_3}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$