1

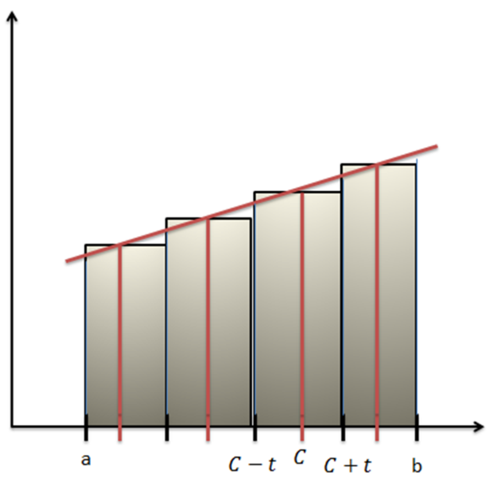
Métodos Numéricos de Integración

Método del Punto Medio

La regla del punto mdio es la siguiente:
Para $n \in \mathbb{N}$ particionamos (de la misma manera que antes)$P = \{a = t_o, t_1, ..., t_n = b\}$ con $t_i = a + ih$ y aproximamos

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{nm} = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (2i-1)\frac{h}{2}\right)(h)$$

Es decir, aproximamos cada integral en $[t_{i-1}, t_i]$ por el área del rectángulo de altura $f(C_i)$ y base $t_i - t_{i-1}$



En otras palabras, calculamos la integral de la función que en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ es constante y coincide con f en $C_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Teorema 1. *(Estimación del error de la regla del punto medio). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada continua en [a,b]. Si $M_3 = Máx_{[a,b]}|f''|$, entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{h}{2}\right)(h)\right| \leq \frac{M_3}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

Demostración. Dada una partición $P = \{a, a + h, a + 2h, ..., a + nh\}$ del intervalo $[a, b]$, tenemos que el conjunto de puntos medios es:

$$P_{medios} = \left\{a + \frac{h}{2}, a + \frac{3}{2}h, a + \frac{5}{2}h, \cdots, b - \frac{h}{2}\right\}$$

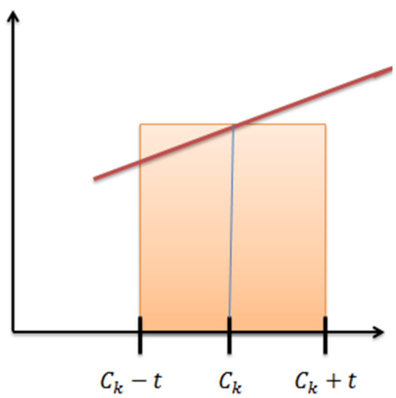
donde el k-ésimo término se puede poner $a + (2k-1)\frac{h}{2}$ donde $k = 1, \cdots, n$ por lo tanto el área del k-ésimo rectángulo es:

$$f\left(a + (2k-1)\frac{h}{2}\right) h$$

y por tanto

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{h}{2}\right) h$$

llamamos c_k al punto medio del subintervalo $\left[a + (2k-1)\frac{h}{2}, a + (2k-1)\frac{h}{2}\right]$ y como es el punto medio, podemos llamar $a + (2k-1)\frac{h}{2} = c_k - t$ y $a + (2k+1)\frac{h}{2} = c_k + t$



$C_k = a + (k - \frac{1}{2})$h

$t \in [0, \frac{h}{2}]$

Defino

$$\varphi_k(t) = \int_{c_k - t}^{c_k + t} f(x)\ dx - f(c_k)2t$$

derivamos con respecto a t y tenemos

$$\varphi_k'(t) = f(c_k + t) + f(c_k - t) - 2f(c_k)$$

derivamos de nuevo y tenemos

$$\varphi_k''(t) = f'(c_k + t) - f'(c_k - t)$$

Ahora usando el teorema del valor medio se tiene

$$\frac{f'(c_k + t) - f'(c_k - t)}{2t} = f''(\xi) \quad con\ \ \xi \in [c_k - t, c_k + t] \quad \Rightarrow \quad f'(c_k + t) - f'(c_k - t) = 2tf''(\xi) \quad con\ \ \xi \in [c_k - t, c_k + t]$$

por lo tanto

$$\varphi_k''(t) = f'(c_k + t) - f'(c_k - t) = 2tf''(\xi) \quad con \quad \xi \in [c_k - t, c_k + t]$$

como f tiene segunda derivada continua en $[a, b]$ existen $m, M =\in [c_k - t, c_k + t]$ tales que $m \leq f''(x) \leq M \quad \forall\, x \in [c_k - t, c_k + t]$ en particular

$$m \leq f''(\xi) \leq M \;\Rightarrow\; m2t \leq f''(\xi)2t \leq M2t \;\Rightarrow\; m2t \leq \varphi_k''(t) \leq M2t$$

vamos ahora a integrar esta última expresión

$$\int m2t\ dt \leq \int \varphi_k''(t)\ dt \leq \int M2t\ dt \;\Rightarrow\; mt^2 \leq \varphi_k'(t) \leq Mt^2$$

de nuevo integramos la última expresión

$$\int mt^2\ dt \leq \int \varphi_k'(t)\ dt \leq \int Mt^2\ dt \;\Rightarrow\; m\frac{t^3}{3} \leq \varphi_k(t) \leq M\frac{t^3}{3}$$

evaluando en $t = \dfrac{h}{2}$ se tiene

$$m\frac{h^3}{24} \leq \varphi_k(h) \leq M\frac{h^3}{24} \;\Rightarrow\; m\frac{h^3}{24} \leq \int_{c_k-\frac{h}{2}}^{c_k+\frac{h}{2}} f(x)\ dx - f(c_k)h \leq M\frac{h^3}{24}$$

tomando la suma desde 1 hasta n

$$\sum_{k=1}^{n} m\frac{h^3}{24} \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{c_k-\frac{h}{2}}^{c_k+\frac{h}{2}} f(x)\ dx - f(c_k)h\right) \leq \sum_{k=1}^{n} M\frac{h^3}{24}$$

se tiene

$$nm\frac{h^3}{24} \leq \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{h}{2}\right)(h) \leq nM\frac{h^3}{24}$$

como $h = \dfrac{b-a}{n}$ entonces

$$nm\frac{(b-a)^3}{24n^3} \leq \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{h}{2}\right)(h) \leq nM\frac{(b-a)^3}{24n^3}$$

es decir

$$m\frac{(b-a)^3}{24n^2} \leq \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{h}{2}\right)(h) \leq M\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

y como $M_3 = max_[a, b]|f''|$ entonces

$$-M_3\frac{(b-a)^3}{24n^2} \leq m\frac{(b-a)^3}{24n^2} \leq \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{h}{2}\right)(h) \leq M\frac{(b-a)^3}{24n^2} \leq M_3\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

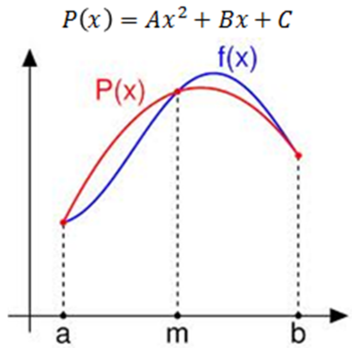
y por lo tanto

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{h}{2}\right)(h)\right| \leq \frac{M_3}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

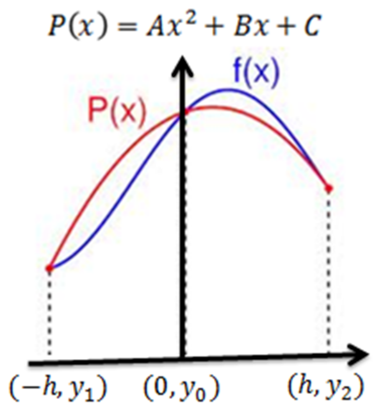
$\square$

Método de Simpson

En este método vamos a aproximar la integral de la función mediante parábolas que pasan por tres puntos



Nuestro primer trabajo consistira en hallar la parábola que pase por tres puntos dados, para esto trasladamos al origen y nos fijamos en los puntos $(0, y_0)$, $(-h, y_1)$ y (h, y_2)



Sea $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ dicha parábola, vamos a determinar los coeficientes de P
Como pasa por $(0, y_0)$ entonces

$$A(0)^2 + B(0) + C = y_0 \quad \Rightarrow \quad C = y_0$$

Como pasa por $(-h, y_1)$ y (h, y_2) entonces

$$\begin{gathered} A(-h)^2 + B(-h) + C = y_1 \\ A(h)^2 + B(h) + C = y_2 \end{gathered}$$

Sumando ambas ecuaciones y despejando A se tiene

$$A = \frac{y_1 + y_2 - 2y_0}{2h^2}$$

por lo tanto al sustituir

$$\left(\frac{y_1+y_2-2y_0}{2h^2}\right)x^2+Bh+y_0=y_2 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{y_2-y_1}{2h}$$

por lo tanto

$$P(x)=\left(\frac{y_1+y_2-2y_0}{2h^2}\right)x^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2h}\right)x+y_0$$

si calculamos el área bajo la función $P(x)$ se tiene

$$\int_{-h}^{h}P(x)\ dx=\int_{-h}^{h}\left(\frac{y_1+y_2-2y_0}{2h^2}\right)x^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2h}\right)x+y_0\ dx=\left(\frac{1}{3}\right)(y_1+y_2+4y_0)$$

Por lo tanto dada una partición $P=\{a,a+ha+2h,...,a+nh\}$ del intervalo $[a,b]$, con $h=\dfrac{b-a}{n}$ se tiene que la aproximación a la integral de $f(x)$ en $[a,b]$ es:

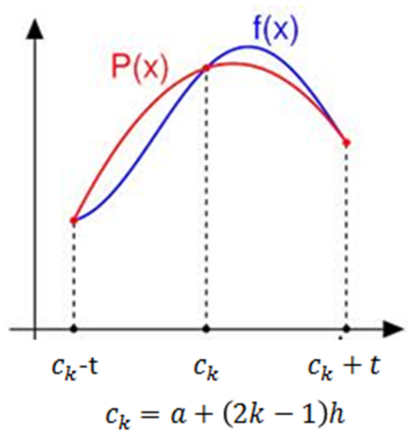
$$\left(\frac{1}{3}\right)(f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)+f(a+2h)+4f(a+3h)+f(a+4h)+\cdots+f(b-2h)+4f(b-h)+f(b))$$

Desde luego hay un error en la aproximación, el cual vamos a estimar

Teorema 2. *Si f tiene cuarta derivada continua en [a,b] y $M_4=max_[a,b]|f^4|$, entonces $\int_a^b f(x)\ dx$ y la aproximación de Simpson difieren en*

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$$

Demostración. Para probar esto, me fijo en el k-ésimo subintervalo de la partición $P=\{a,a+ha+2h,...,a+nh\}$ del intervalo $[a,b]$ y llamo $c_k=a+(2k-1)h$



donde $t\in[0,h]$ y definimos

$$\varphi_k(t)=\left(\frac{1}{3}\right)(f(c_k-t)+4f(c_k)+f(c_k+t)-\int_{c_k-t}^{c_k+t}f(x)\ dx$$

derivemos $\varphi_k(t)$

$$\varphi_k'(t) = \left(\frac{1}{3}\right)(f(c_k - t) + 4f(c_k) + f(c_k + t) + (f'(c_k + t) - f'(c_k - t))t) - f(c_k - t) - f(c_k + t)$$

notar que $\varphi_k'(0) = 0$
derivemos de nuevo

$$\varphi_k''(t) = \left(\frac{1}{3}\right)(f'(c_k+t)-f'(c_k-t)+t(f''(c_k-t)+f''(c_k+t))+(f'(c_k+t)-f'(c_k-t)))-(f'(c_k+t)-f'(c_k-t))$$

simplificando

$$\varphi_k''(t) = \left(\frac{1}{3}\right)(f'(c_k - t) - f'(c_k + t) + (f''(c_k - t) + f''(c_k + t))t)$$

notar que $\varphi_k''(0) = 0$
derivando de nuevo

$$\varphi_k'''(t) = \left(\frac{1}{3}\right)(-f''(c_k - t) - f''(c_k + t) + f''(c_k + t) + f''(c_k - t) + t(f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t)))$$

simplificando

$$\varphi_k'''(t) = \left(\frac{1}{3}\right)(t(f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t)))$$

por el teorema del valor medio se tiene

$$f^4(\xi) = \frac{f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t)}{2t} \ \ \xi \in [c_k-t, c_k+t] \ \Rightarrow \ 2tf^4(\xi) = f'''(c_k+t)-f'''(c_k-t) \ \ \xi \in [c_k-t, c_k+t]$$

por lo tanto

$$\varphi_k'''(t) = \left(\frac{1}{3}\right)(t(f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t))) = \left(\frac{1}{3}\right)(t(2tf^4(\xi))) = \left(\frac{1}{3}\right)(2t^2 f^4(\xi))$$

como f tiene cuarta derivada continua entonces existe $m.M \in [c_k - t, c_k + t]$ tal que

$$m \leq f^4(x) \leq M \ \ \forall\, x \in [c_k - t, c_k + t] \ \Rightarrow \ m \leq f^4(\xi) \leq M \ \Rightarrow \ \frac{m2}{3}t^2 \leq \frac{2}{3}t^2 f^4(\xi) \leq \frac{2}{3}t^2 M$$

por lo tanto

$$\frac{m2}{3}t^2 \leq \varphi_k'''(t) \leq \frac{2}{3}t^2 M$$

integrando esta última expresión obtenemos

$$\frac{2m}{9}t^3 \leq \varphi_k''(t) \leq \frac{2M}{9}t^3$$

integrando de nuevo se obtiene

$$\frac{2m}{36}t^4 \leq \varphi_k'(t) \leq \frac{2M}{36}t^4$$

integrando una vez más

$$\frac{2m}{180}t^5 \leq \varphi_k(t) \leq \frac{2M}{180}t^5$$

ahora evaluemos en $t = h$

$$\frac{2m}{180}h^5 \leq \varphi_k(h) \leq \frac{2M}{180}h^5$$

es decir

$$\frac{m}{90}h^5 \leq \varphi_k(h) \leq \frac{M}{90}h^5$$

si sumamos hasta $\frac{n}{2}$, obtenemos

$$n\frac{m}{180}h^5 \leq Aprox_{simpson} - \int_a^b f(x)\ dx \leq n\frac{M}{180}h^5$$

como $h = \frac{b-a}{n}$ se obtiene

$$\frac{m}{180n^4}(b-a)^5 \leq Aprox_{simpson} - \int_a^b f(x)\ dx \leq \frac{M}{180n^4}(b-a)^5$$

al ser $M_4 = max_{[a,b]}|f^4|$ entonces

$$\frac{-M_4}{180n^4}(b-a)^5 \leq \frac{m}{180n^4}(b-a)^5 \leq Aprox_{[simpson]} - \int_a^b f(x)\ dx \leq \frac{M}{180n^4}(b-a)^5 \leq \frac{M_4}{180n^4}(b-a)^5$$

por lo tanto

$$\left| Aprox_{[simpson]} - \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \frac{M_4}{180n^4}(b-a)^5$$

$\square$