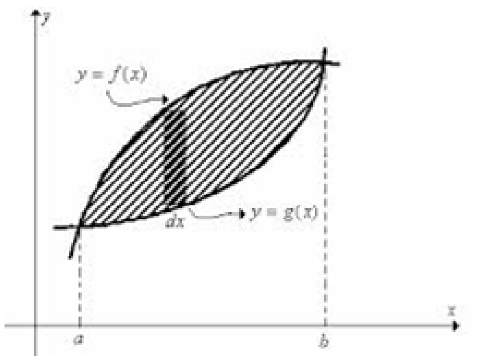
1

Aplicaciones de la Integral

Cálculo de Áreas de Regiones Planas

Área de un conjunto limitado por la gráfica de dos funciones

Para calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$



Consideremos una partición $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ de $[a, b]$, entonces una aproximación al área es:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_1) - g(\xi_i))\Delta_{x_i} \quad con \quad \Delta\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad y \quad \Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$$

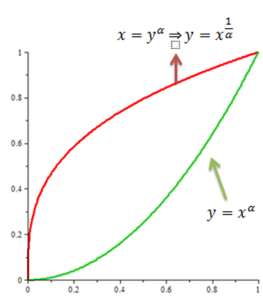
por lo tanto

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_1) - g(\xi_i))\Delta_{x_i}$$

esta última expresión es una suma de Riemann, por lo tanto

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

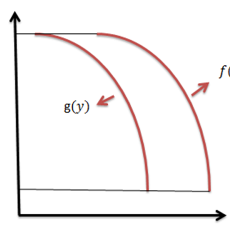
Ejemplo.-Calcular el área de la región limitada por $y = x^\alpha$ y $x = y^\alpha$, donde $\alpha > 1$ en $[0, 1]$



tenemos que

$$A=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{\alpha}}-x^{\alpha}\right)dx=\frac{x^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha}+1}-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+1}-\frac{1}{\alpha+1}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

Si en el área encerrada por las gráficas f, g estas dependieran de y en un intervalo $[c, d]$



de manera analoga se construye $P=\{c=y_0, y_1, ..., y_n=d\}$ y tenemos que la aproximación es:

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_1)-g(\xi_i))\Delta_{y_i}\quad con\quad \Delta\xi_i\in[y_{i-1}, y_i]\quad y\quad \Delta_{y_i}=y_i-y_{i-1}$$

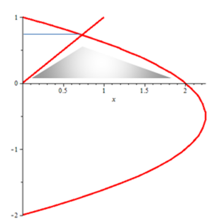
por lo tanto

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_1)-g(\xi_i))\Delta_{y_i}$$

esta última expresión es una suma de Riemann, por lo tanto

$$A=\int_a^b(f(y)-g(y))dx$$

Ejemplo.-Calcular el área limitada por $x=2-y-y^2$ y $x=y$



En este caso primero tenemos que hallar los puntos de intersección de las gráficas

$$2-y-y^2=y\ \Rightarrow\ -2+2y+y^2=0\ \Rightarrow\ y=-1-\sqrt{3}\ ,\ y=-1+\sqrt{3}$$

por lo tanto

$$A=\int_0^{\sqrt{3}-1}(2-y-y^2-y)dy=\int_0^{\sqrt{3}-1}(2-2y-y^2)dy=2y-y^2-\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}-2-(3-2\sqrt{3}+1)-(6\sqrt{3}-10)\left(\frac{1}{3}\right)=$$

$$2\sqrt{3}-\frac{8}{3}$$

Si la gráfica de la función viene dada por las ecuaciones parametricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ se tiene que

$$A = \int_a^b f(x)\ dx \underbrace{=}_{\substack{x=a\ \Rightarrow\ \varphi(t_1)=a \\ x=b\ \Rightarrow\ \varphi(t_2)=a}} \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \psi(y)\varphi'(t)dt$$

Ejemplo.-Hallar el área limitada por la gráfica de $[\cos(t), \operatorname{sen}(t)]$ con $t \in [0, 2\pi]$
El área pedida es el área del circulo unidad, es decir si consideramos primero el subconjunto del plano donde $y \geq 0$ se tiene $\varphi(t) = \cos(t)$ y $\psi(t) = \operatorname{sen}(t)$ por tanto

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{x_1=\varphi(t_1)=-1\ \Rightarrow\ -1=\cos(t_1)\ \Rightarrow\ t_1=\pi \\ x_2=\varphi(t_2)=1\ \Rightarrow\ 1=\cos(t_2)\ \Rightarrow\ t_2=0}} \int_{\pi}^{0} (\operatorname{sen}(t))(-\operatorname{sen}(t))dt = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(t)dt$$

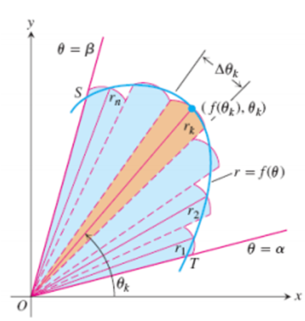
$$= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\,|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$$

si $y \leq 0$ se tiene

$$A = \int_{-1}^{1} -\sqrt{1-x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{x_1=\varphi(t_1)=-1\ \Rightarrow\ -1=\cos(t_1)\ \Rightarrow\ t_1=\pi \\ x_2=\varphi(t_2)=1\ \Rightarrow\ 1=\cos(t_2)\ \Rightarrow\ t_2=2\pi}} -\int_{\pi}^{2\pi} (\operatorname{sen}(t))(-\operatorname{sen}(t))dt = \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t)dt$$

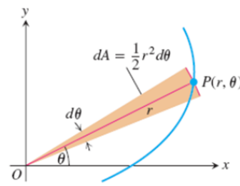
$$= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\,|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Si la gráfica de la función viene dada en coordenadas polares $r = f(\theta)$ y la región sobre la cual vamos a calcular el área esta limitada por $r = f(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ vamos a dar una partición de $[\alpha, \beta]$ $P = \{\theta_0 = \alpha, \theta_1 ..., \theta_n = \beta\}$,



considerando el k-ésimo subintervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ vamos a aproximar el área por sectores circulares. El área del sector circular determinado por este subintervalo es:

$$A_{sector} = \frac{1}{2} r^2(\theta_k)(\theta_k - \theta_{k-1})$$



si sumamos desde 1 hasta n

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_k)(\theta_k - \theta_{k-1})$$

haciendo crecer n

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_k)(\theta_k - \theta_{k-1})$$

esta última es una suma de Riemann, por lo tanto

$$A = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\ d\theta$$

Ejemplo.-Dada una circunferencia de radio 3 y centro en el origen, determinar el área encerrada por ella a partir de su ecuación polar $r = 3$
Tenemos que

$$A = 4\left(\frac{1}{2}\right) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3^2 dr = 2\left(9r\left|_0\right|^{\frac{\pi}{2}}\right) = 9\pi$$