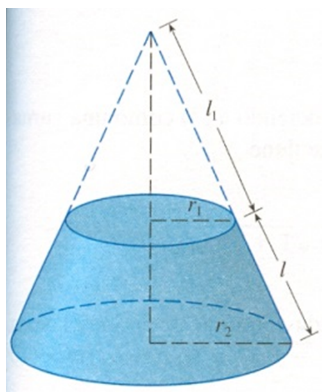
1

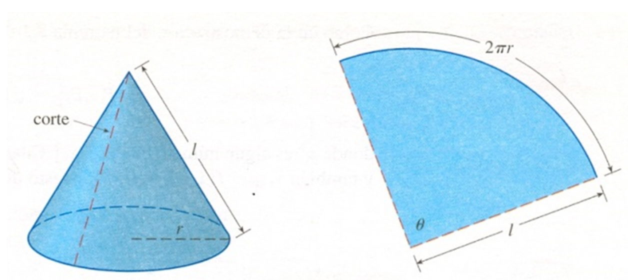
Aplicaciones de la Integral

Cálculo de Áreas de Superficies

Para esto necesitamos primero hallar el área de un cono truncado.
Vamos a considerar el siguiente cono



hacemos un corte y abrimos el cono, nos queda un sector circular



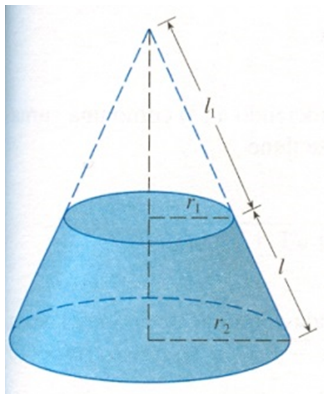
Tenemos que el área de este sector circular es: $A = \dfrac{\ell^2}{2}\theta$

Por otro lado $2\pi r = \ell\theta \;\Rightarrow\; \theta = \dfrac{2\pi r}{\ell}$

por lo tanto

$$A = \frac{\ell^2}{2}\theta = \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{2\pi r}{\ell}\right) = \pi r \ell$$

con esta fórmula vamos a calcular el área del cono truncado



Según la figura
$A_{cono\ chico} = \pi r_1 \ell_1$
$A_{cono\ grande} = \pi r_2(\ell_1 + \ell)$
por lo tanto

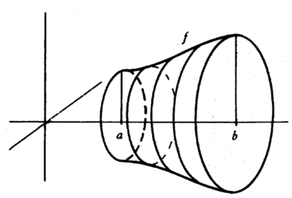
$A_{cono\ trucado} = \pi r_2(\ell_1+\ell) - \pi r_1 \ell_1 = \pi((r_2-r_1)\ell_1 + r_2\ell)$

ahora bien por semejanza de triángulos
$\dfrac{\ell_1+\ell}{r_2} = \dfrac{\ell_1}{r_1} \Rightarrow r_2\ell_1 = r_1\ell_1 + r_1\ell \Rightarrow (r_2-r_1)\ell_1 = r_1\ell$
por lo tanto

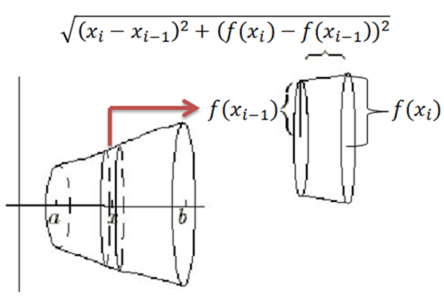
$A_{cono\ trucado} = \pi((r_2-r_1)\ell_1 + r_2\ell) = \pi(r_1+r_2)\ell$

Áreas de Superficies obtenidas al rotar la curva alrededor de eje X

Ahora consideremos una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [a,b]$ y rotemos la gráfica alrededor del eje X



Sea $P = \{a = x_0, x_1, ..., xn = b\}$ una partición de $[a,b]$ y tal que para cada $[x_{i-1}, x_[i]]$ al formar los segmentos $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ y $[x_i, f(x_i)]$ y al rotarlos se forma un cono truncado



En este caso el área del cono truncado es:

$$A = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}))\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

aplicando el teorema del valor medio se obtiene

$$A = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Tomando la suma

$$A_{superficie} \approx \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}))\sqrt{1 + +(f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

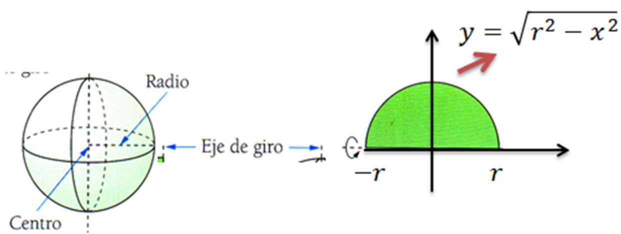
por lo tanto

$$A_{superficie} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

esta última es una suma de riemann, por lo que

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

esta expresión nos proporcionara el área de la superficie obtenida de girar la gráfica de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ respecto al eje X.
Ejemplo.-Calcular el área de la esfera de radio r vista como superficie de revolición
En este caso se tiene



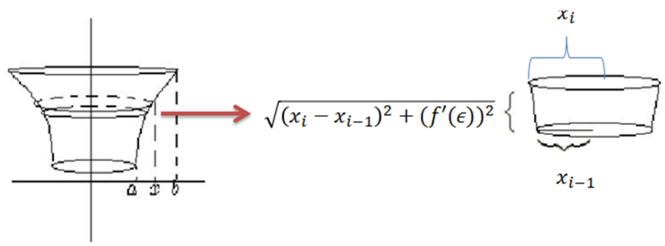
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

por lo tanto

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r dx = 4\pi r^2$$

Áreas de Superficies obtenidas al rotar la curva alrededor de eje Y

Ahora consideremos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x) \geq 0 \; \forall \; x \in [a, b]$ y rotemos la gráfica alrededor del eje Y



En este caso el área del cono truncado es:

$$A = \pi(x_{i-1} + x_{i-1})\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

aplicando el teorema del valor medio se obtiene

$$A = \pi(x_{i-1} + x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Tomando la suma

$$A_{superficie} \approx \sum_{i=1}^{n} \pi(x_{i-1} + x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

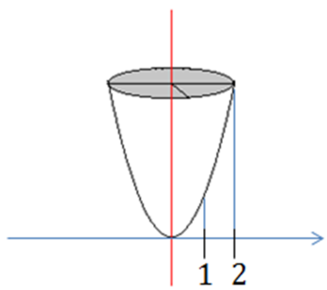
por lo tanto

$$A_{superficie} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(x_{i-1} + x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

esta última es una suma de riemann, por lo que

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

esta expresión nos proporcionara el área de la superficie obtenida de girar la gráfica de la curva $y = f(x)$, $a \le x \le b$ respecto al eje Y.
Ejemplo.-Calcular el área de la superficie obtenida girar la parábola $y = x^2$ alrededor del eje Y de (1,1) a (2,4)
en esta caso



Si se gira en torno al eje Y entonces

$$A = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+(2x)^2}dx =$$

$$2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+4x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{u=1+4x^2 \\ du=8xdx}} \frac{2\pi}{8}\int_5^{17} \sqrt{u}du = \frac{\pi}{6}(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$$