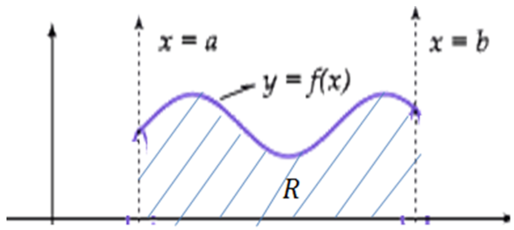
1

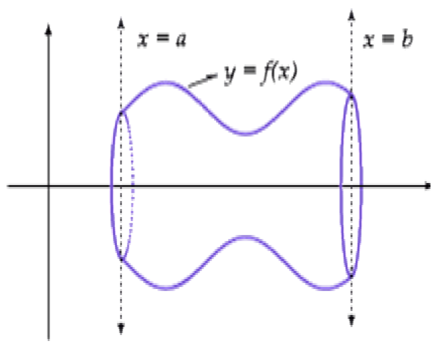
Aplicaciones de la Integral

Volumenes de Sólidos de Revolución (Rotación alrededor del eje X)

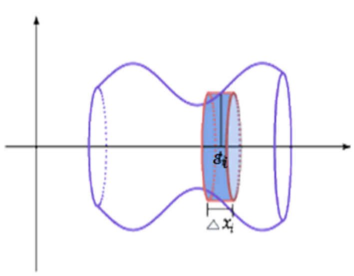
Si se tiene una región R limitada por la gráfica de una función f, las rectas x=a y y=b y el eje X



Queremos calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región R alrededor del eje X.



Para esto tomemos una partición P de $[a, b]$, dada por $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ entonces quedan definidos n restángulos que al rotarse alrededor del eje X, generan cada uno de ellos un cilindro curvo de altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, y si tomamos un $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$



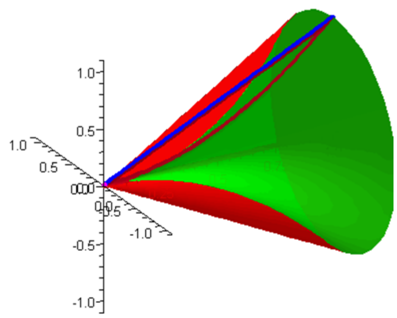
el volumen del i-ésimo cilindro recto es

$$V_i = \pi \left(f(\xi_i)^2\right)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \left(f(\xi_i)^2\right)(x_i - x_{i-1})$$

por lo tanto

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(f(\xi_i)^2\right)(x_i - x_{i-1}) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Ejemplo.-Hallar el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje X el área delimitada por $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$

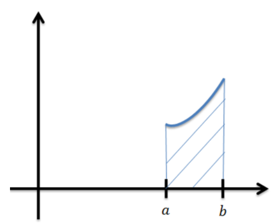


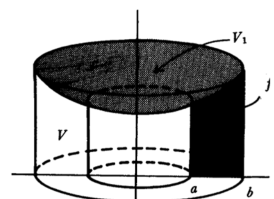
En este caso

$$A = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1\right) = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

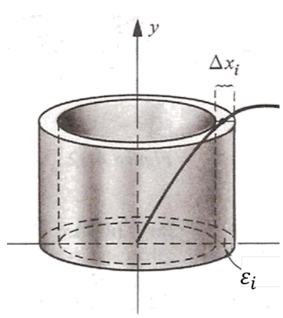
Volumenes de Sólidos de Revolución (Rotación alrededor del eje Y)

Si hacemos girar la región por debajo de la gráfica de una función f, alrededor del eje vertical Y





Para esto tomemos una partición P de $[a, b]$, dada por $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ tenemos que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ podemos contruir un rectángulo de ancho $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y altura $f(\xi_i)$ con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y al rotarlo se forma un cilindro



el volumen del i-ésimo cilindro recto es

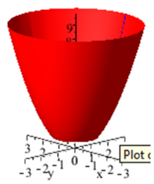
$$V_i = \pi \left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) (f(\xi)) = \pi \left((x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})\right) (f(\xi))$$

$$\Rightarrow V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \left((x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})\right) (f(\xi))$$

por lo tanto

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left((x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})\right) (f(\xi)) = 2\pi \int_a^b x\,(f(x))\, dx$$

Ejemplo.-Calcular el volumen de sólido de revolución que se genera al rotar alrededor del eje Y la region limitada por la gráfica $f(x) = x^2$, las rectas $x = 1$ y $x = 3$ y el eje x

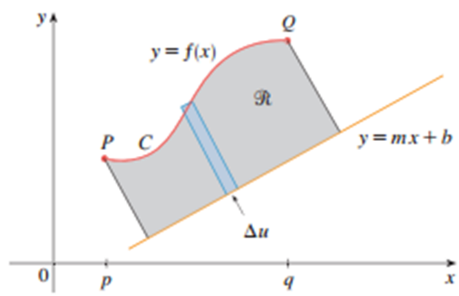


En este caso se tiene

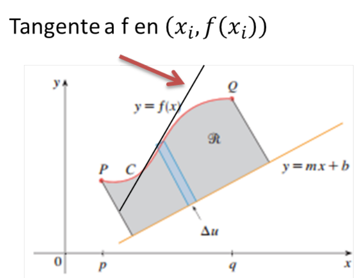
$$V = 2\pi \int_1^3 x^3 dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} \Big|_1^3 \right) = 40\pi$$

Área bajo la gráfica de una función respecto a una recta y=mx+b

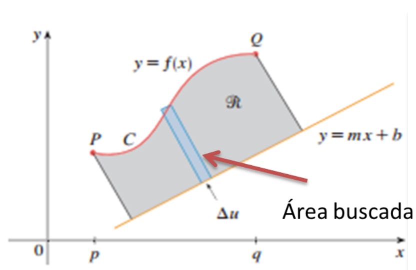
Consideremos la gráfica de la función $y = f(x)$ entre los puntos $P(p, f(p))$ y $Q(q, f(q))$ y sea R la región acotada por la grafica de la función y por la recta $y = mx + b$ entre las perpendiculares a la recta por P y Q



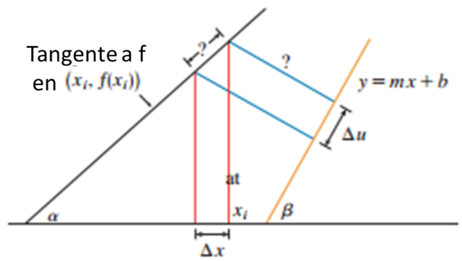
y vamos a encontrar una fórmula que nos proporcione el área de R.
Para esto consideramos la recta tangente a la gráfica de la función en el punto x_i



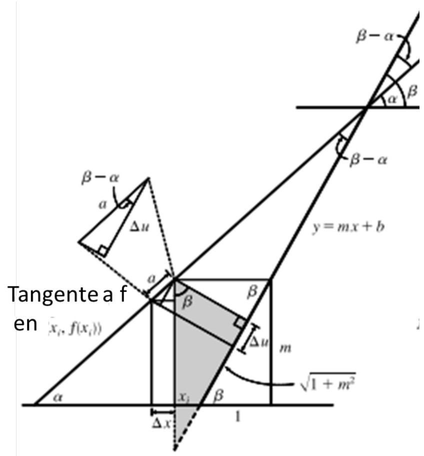
y vamos a encontrar el área del rectángulo entre la tangente y la recta $y = mx + b$



Pare encontrar el área buscada nos fijamos en la parte de la tangente y la recta



se tiene que según la figura



$\tan\alpha = f'(x_i)$ y $\tan\beta = m$, además

$$\cos(\alpha) = \frac{\Delta x}{\Delta u} \Rightarrow \Delta u = \frac{\Delta x}{\cos(\alpha)} = \Delta x \ \sec(\alpha)$$

$$= \Delta x\sqrt{1+\tan^2(\alpha)+1} = \Delta x\sqrt{1+(f'(x_i))^2}$$

También

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{\Delta u}{\Delta x \ \sec(\alpha)} = \Delta x\frac{\cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}$$

$$= \Delta x(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\tan\alpha)$$

de las identidades

$$\tan^2\beta + 1 = \sec^2\beta \ \Rightarrow \ \tan^2\beta + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta} \ \Rightarrow \ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\beta+1}} \ \Rightarrow \ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2} \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}\beta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Al ser $\tan\alpha = f'(x_i)$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ se tiene que

$$\Delta u = \Delta x(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\tan\alpha) = \Delta x\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}f'(x_i)\right)$$

Ahora solo nos falta encontrar la longitud de la altura del rectángulo
Para esto podemos utilizar la fórmula de la distancia de un punto a una recta

$$d((x_i, f(x_i), y = mx + b) = \frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

de esta manera el área del i-ésimo rectángulo es:

$$A_{R_i} = \Delta x \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(x_i) \right) \cdot \frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

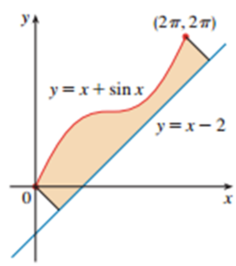
por lo tanto

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta x \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(x_i) \right) \cdot \frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

y por lo tanto

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(x_i) \right) \cdot \frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{1+m^2} \int_p^q (f(x) - mx - b)(1 + mf'(x))dx$$

Ejemplo.- Calcular el área limitada por la gràfica de la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ desde $(0,0)$ hasta (π, π) y la recta $y = x - 2$



En este caso se tiene $m = 1$, $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, $mx + b = x - 2$, $p = 0$ y $q = 2\pi$ por tanto

$$A = \frac{1}{1+1^2} \int_0^{2\pi} (x + \operatorname{sen} x - (x-2))(1 + 1(1 + \cos x))dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x + 4 + 2\cos x)dx = 4\pi$$