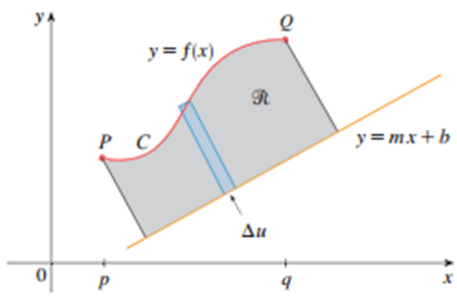
1

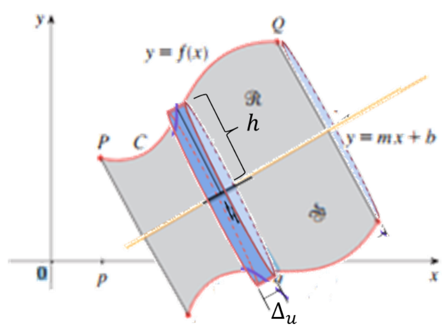
Aplicaciones de la Integral

Volumenes de Sólidos de Revolución (Rotación alrededor de la recta y=mx+b)

Consideremos la gráfica de la función $y = f(x)$ entre los puntos $P(p, f(p))$ y $Q(q, f(q))$ y sea R la región acotada por la grafica de la función y por la recta $y = mx + b$ entre las perpendiculares a la recta por P y Q

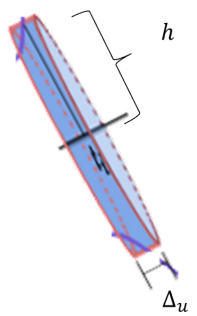


Si rotamos la región R alrededor de la recta $y = mx + b$



vamos a encontrar una fórmula que nos proporcione el volumen del Sólido obtenido.

Para esto consideramos el cilindro de altura h y radio Δ_u



Teniamos que

$$\Delta u = \Delta x \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(x_i) \right)$$

$$h = \frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Por lo tanto el volumen del i-ésimo cilindro es:

$$V_i = \pi \left(\frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}} \right)^2 \left(\Delta x \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(x_i) \right) \right)$$

se tiene entonces

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \left(\frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}} \right)^2 \left(\Delta x \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(x_i) \right) \right)$$

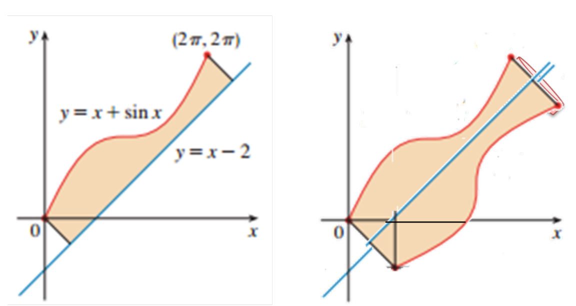
por lo tanto

$$V = \lim_{n\to\infty} \pi \left(\frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}} \right)^2 \left(\Delta x \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(x_i) \right) \right)$$

esta última expresión es una suma de Riemann, por lo tanto

$$V = \frac{\pi}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} \int_p^q (f(x) - mx - b)^2 \, (1 + mf'(x)) \, dx$$

Ejemplo.-Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región limitada por $f(x) = x + \text{sen}(x)$, la recta $y = x - 2$ y los segmentos perpendiculares a la recta $y = x - 2$ por los puntos $(0, 0)$ y $(2\pi, 2\pi)$



En este caso se tiene

$$V = \frac{\pi}{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (x + \text{sen}(x) - x + 2)^2 \, (1 + 1 + \cos(x)) \, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (\text{sen}(x)+2)^2 (\cos(x)+2) dx = \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi^2$$