Integrabilidad de funciones discontinuas

Teorema 1. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ f acotada en $[a,b]$. Si f es continua en $[a,b]$ excepto en un conjunto finito de puntos, entonces f es integrable*

Demostración. Sean $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,...,\gamma_N$ los puntos en que f es discontinua, supongamos también que

$$\gamma_1<\gamma_2<\gamma_3<\gamma_4<...<\gamma_N$$

sean

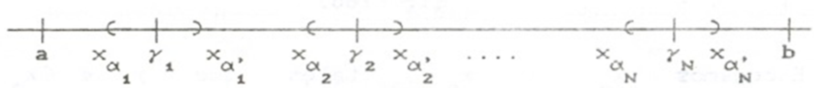
$$a<x_{\alpha_1}<x_{\alpha_{1'}}<x_{\alpha_2}<x_{\alpha_{2'}}<x_{\alpha_3}<x_{\alpha_{3'}}<x_{\alpha_4}<x_{\alpha_{4'}}<...<x_{\alpha_N}<x_{\alpha_{N'}}<b$$

tales que

$$\gamma_1\in(x_{\alpha_1},x_{\alpha_{1'}}),\quad \gamma_2\in(x_{\alpha_2},x_{\alpha_{2'}}),...,\gamma_N\in(x_{\alpha_N},x_{\alpha_{N'}})$$

y tales que

$$(x_{\alpha_{i'}}-x_{\alpha_i})<\frac{\epsilon}{2N(M-m)}\quad \forall\ i=1,2,3,...,N$$



Asi tenemos que f es continua en los intervalos

$$[a,x_{\alpha_1}],\quad [x_{\alpha_{1'}},x_{\alpha_2}],\quad [x_{\alpha_{2'}},x_{\alpha_3}],...,[x_{\alpha_{N'}},b]$$

y por tanto uniformemente continua en ellos.
Entonces existen $\delta_1>0\delta_2>0,...,\delta_N>0$ tales que

$$\forall\ x,x'\ \in\ [a,x_{\alpha_1}]\quad |x'-x|<\delta_1\quad\Rightarrow\quad |f(x')-f(x)|<\frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

$$\forall\ x,x'\ \in\ [x_{\alpha_{1'}},x_{\alpha_2}]\quad |x'-x|<\delta_2\quad\Rightarrow\quad |f(x')-f(x)|<\frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

$$\forall\ x,x'\ \in\ [x_{\alpha_{2'}},x_{\alpha_3}]\quad |x'-x|<\delta_3\quad\Rightarrow\quad |f(x')-f(x)|<\frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

$$\vdots$$

$$\forall\ x,x'\ \in\ [x_{\alpha_{N'}},b]\quad |x'-x|<\delta_{N+1}\quad\Rightarrow\quad |f(x')-f(x)|<\frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

Por tanto sean

$$P_1\in P_{[a,x_{\alpha_1}]}\ \ tal\ \ que\ \ \|P_1\|<\delta_1$$

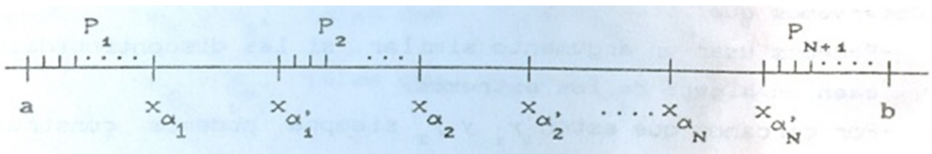
$$P_2\in P_{[x_{\alpha_{1'}},x_{\alpha_2}]}\ \ tal\ \ que\ \ \|P_2\|<\delta_1$$

$$\vdots$$

$$P_{N+1}\in P_{[x_{\alpha_{N'}},b]}\ \ tal\ \ que\ \ \|P_{N+1}\|<\delta_{N+1}$$

de modo que

$$\overline{S}(f,P_i)-\underline{S}(f,P_i)=\sum_{k=1}^{\gamma_i}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})<\sum_{k=1}^{\gamma_i}\frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}(x-k-x_{k-1})=\frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}(b-a)=\frac{\epsilon}{2(N+1)}$$



Por otro lado

$$(M_{\alpha_i}-m_{\alpha_i})(x_{\alpha'_i}-x_{\alpha_i})<(M-n)\frac{\epsilon}{2N(M-m)}<\frac{\epsilon}{2N}$$

Sea $P=P_1\bigcup P_2\bigcup P_3\bigcup\ldots\bigcup P_{N+1}$ de aqui se tiene

$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=\overline{S}(f,P_1)-\underline{S}(f,P_1)+(M_{\alpha_1}-m_{\alpha_1})(x_{\alpha'_1}-x_{\alpha_1})+\overline{S}(f,P_2)-\underline{S}(f,P_2)+(M_{\alpha_2}-m_{\alpha_2})(x_{\alpha'_2}-x_{\alpha_2})+$$

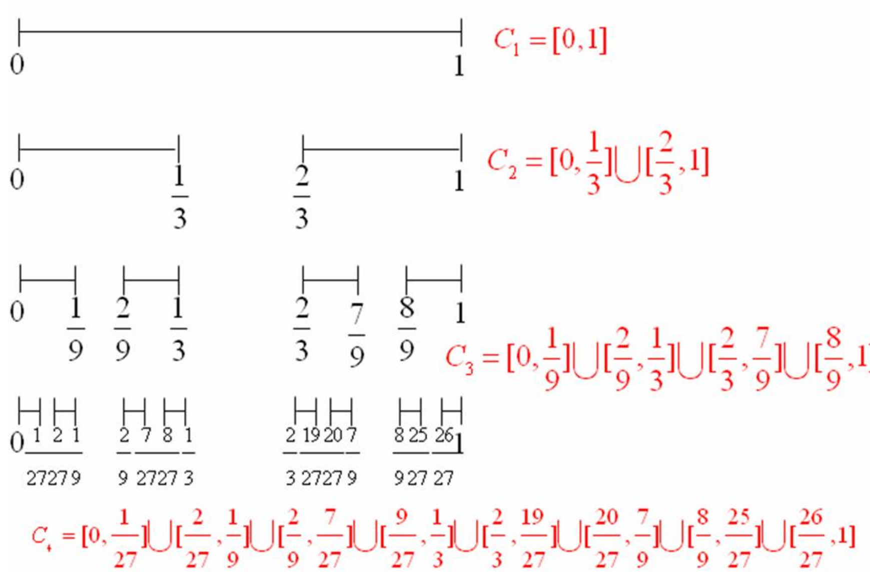
$$\ldots+\overline{S}(f,P_{N+1})-\underline{S}(f,P_{N+1})$$

$$<\frac{\epsilon}{2(N+1)}+\frac{\epsilon}{2N}+\frac{\epsilon}{2(N+1)}+\frac{\epsilon}{2N}+\ldots+\frac{\epsilon}{2(N+1)}<(N+1)\frac{\epsilon}{2(N+1)}+N\frac{\epsilon}{2N}=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

□

Definición 1. *Se dice que en un conjunto $A\subset B$ tiene contenido cero si $\forall\epsilon>0$ $\exists$ intervalos $I_1,I_2,\ldots,I_n$ tales que $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}I_i$ y tales que $\sum_{i=1}^{n}\ell(I_i)<\epsilon$*

Ejemplo.- El conjunto de cantor



Definimos el conjunto de cantor como la intersección de todos estos conjuntos es decir:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Tenemos que

C_1 consta de 2^0 intervalos de longitud 1
C_2 consta de 2^1 intervalos de longitud $\frac{1}{3}$
C_3 consta de 2^2 intervalos de longitud $\frac{1}{9}$
C_4 consta de 2^3 intervalos de longitud $\frac{1}{27}$
Por lo tanto
C_n consta de 2^{n-1} intervalos de longitud $\frac{1}{3^{n-1}}$

Podemos observar que $C \subset C_n \ \forall n \in \ N$ y por tanto podemos encerrar a C en un número finito de intervalos, si multiplicamos el número de intervalos que contiene C_n por la longitud de cada uno de ellos, obtenemos que:

$$\ell(C_n) = 2^{n-1}(\frac{1}{3^{n-1}}) = (\frac{2}{3})^{n-1}$$

conforme n crezca $\ell(C_n)$ podra hacerse tan pequeña como se quiera. Por lo tanto C tiene contenido cero

Por lo tanto una función acotada, continua en todo [0,1] excepto en C, sería integrable.

Teorema 2. *sea $f : [a,b] \to R$ f acotada en [a,b] si f es continua en [a,b], excepto en un conjunto de discontinuidades que puede ser encerrado en un número finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos, entonces f es integrable en [a,b].*