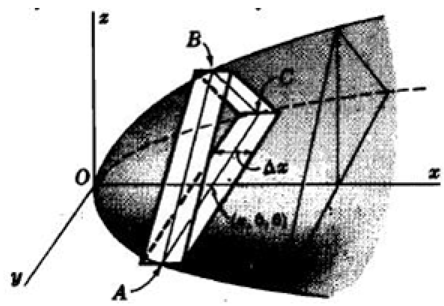
1

Aplicaciones de la Integral

Volumenes de Sólidos que no son de Revolución

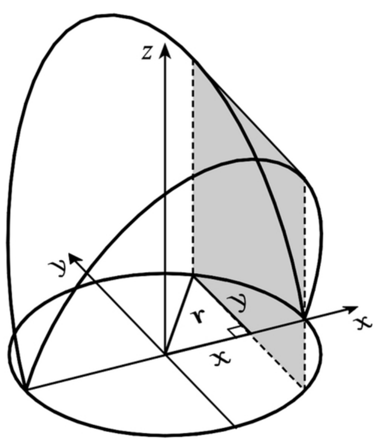
Consideremos una superficie que al cortar con un plano transversal se obtiene una región conocida



En esta caso consideramos una partición del intervalo $[a,b]$ $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ y en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se puede construir un "prima"de altura $\Delta_{x_k} = x_k - x_{k-1}$ y área de la base A_k por lo que el volumen del k-ésimo prisma es:

$$V_k = A_k \Delta_{x_k} \Rightarrow V \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \Delta_{x_k} \Rightarrow V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} A_k \Delta_{x_k} \Rightarrow V = \int_a^b A(x)dx$$

Ejemplo.-Calcular el volumen del sólido cuyas secciones transversales son cuadrados y cuya base es un circulo de radio r

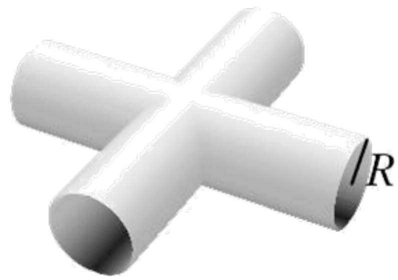


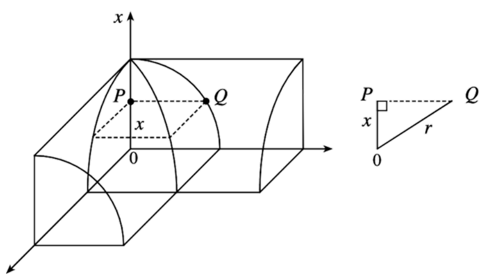
En este caso se tiene que el área de la sección transversal es:

$$A(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow V = \int_{-r}^{r} \left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$4 \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \frac{16r^3}{3}$$

Ejemplo.-Calcular el volumen del sólido que determina la intersección de dos cilindros de radio r





En este caso se tiene que el área de la sección transversal es:

$$|PQ|^2 = r^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad A(x) = 4\left(r^2 - x^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$V = 8\int_0^r \left(r^2 - x^2\right)^2 dx = \frac{16r^3}{3}$$