1

Aplicaciones de la Integral

Trabajo

Si un objeto se desplaza en línea recta con función de posición $s(t)$, entonces la fuerza F sobre el objeto (en la misma dirección) está definida por la segunda ley de newton del movimiento.
F es el producto de su masa m por su aceleración

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

En el caso de aceleración constante la fuerza F también es constante y el trabajo realizado está definido como el producto de la fuerza F por la distancia d que el objeto recorre

$$w = F \times d$$

Si F se mide en newtons y d se mide en metros la unidad del trabajo será el Joule
Si F se mide en libras y d se mide en pies la unidad del trabajo será el libra-pie$\approx$ 1.36 Joules
Suponga que el objeto se desplaza a lo largo del eje X en la dirección positiva desde $x = a$ hasta $x = b$ y en cada punto x entre a y b una fuerza $f(x)$ actúa sobre el objeto, donde f es una función continua. Si dividimos $[a, b]$ en n subintervalos $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ en cada $[x_{k-1}, x_k]$ tomamos un x_k^* y la furza en ese punto es $f(x_k^*)$.
El trabajo que realiza el objeto desde x_{k-1} a x_k es:

$$w_k \approx f(x_k^*)\Delta_{x_k}$$

de esta manera el trabajo total que realiza el objeto a lo largo del intervalo $[a, b]$ es:

$$w_t \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_{x_k} \quad \Rightarrow \quad w_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_{x_k}$$

esta última expresión es una suma de Riemann, por lo que

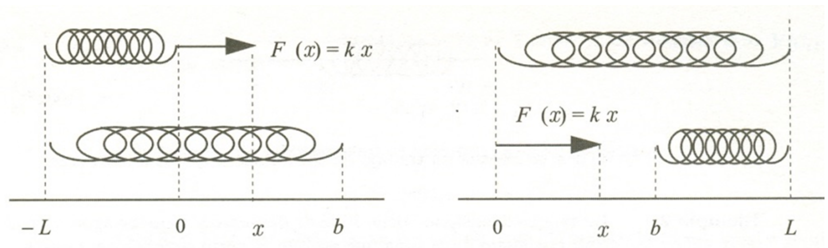
$$w = \int_a^b f(x)dx$$

Ley de Hooke. La fuerza para estirar o comprimir un resorte por abajo de su límite de elasticidad es directamente proporcional a la magnitud x de lo estirado o comprimido.

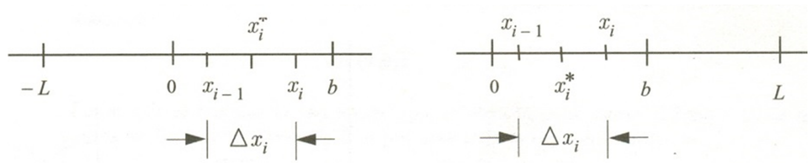
$$F(x) = kx$$

en donde k es una constante

Para determinar el trabajo que se efectúa al estirar o comprimir un resorte una longitud b,



considérese una partición $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ del intervalo $[0, b]$, y un punto muestra x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición.



Por la ley de Hooke, la fuerza que actúa en x_i^* durante el estiramiento es:

$$F(x_i^*)kx_i^*$$

Entonces el trabajo w_i que se efectúa a lo largo de $[x_{i-1}, x_i]$ es

$$w_i = F(x_i^*)\Delta_{x_1} = kx_i^*\Delta_{x_i}$$

Por lo que el trabajo que se realiza a lo largo del estiramiento ó compresión desde 0 hasta b es:

$$w = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kx_i^*\Delta_{x_i} \quad \Rightarrow \quad w = \int_0^b kx\ dx$$

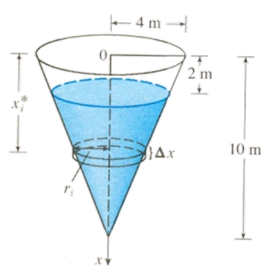
Ejemplo.-Una fuerza de 40 newtons se requiere para estirar un resorte desde su longitud original de 10 cm a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabjo se hace al estirar el resorte desde 15 a 18 cm?
Para esto notemos que el resorte esta estirado 5 cm=0.05m. Esto quiere decir que $f(0{,}05) = 40$, de modo que

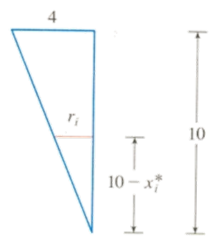
$$0{,}05k = 40 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{40}{0{,}05} = 800$$

Poe eso $f(x) = 800x$ y el trabajo hecho para estirar el resorte de 15 a 18 cm es:

$$w = \int_{0{,}05}^{0{,}08} 800x\ dx = 800\frac{x^2}{2}\Big|_{0{,}05}^{0{,}08} = 1{,}56$$

Ejemplo.- Un depósito de agua tiene la forma de un cono invertido de altura igual a 10 m y radio de la base de 4 m. Se llena con agua el depósito hasta alcanzar una altura de 8 m. Calcule el trabajo que se requiere para vaciar el agua del depósito mediante bombeo por la parte superior del depósito. (La densidad del agua es 1000 $\frac{kg}{m^3}$)





En este caso se tiene considerar una partición de la altura del cono en n subintervalos y a una profundidad x_i^* nos fijamos en la i-ésima capa en forma de cilindro de radio r_i y altura Δ_x

Para calcular r_i por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \quad \Rightarrow \quad r_i = \frac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

Por lo tanto el volumen de la i-ésima capa es

$$V_i \approx \pi \; r_i^2 \Delta_x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \Delta_x$$

de modo que su masa es: densidad$\times$ volumen

$$1000 \times \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \Delta_x = 160\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta_x$$

La fuerza necesaria para subir la capa debe superar la fuerza de gravedad y de este modo

$$F_i = m_i g = (9{,}8)(160\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta_x) \approx 1570\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta_x$$

Cada partícula de la capa debe viajar una distancia x_i^*. El trabajo w realizado para subir esta capa hasta lo alto del depósito es:

$$w_i \approx F_i x_i^* \approx 1570\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta_x$$

por lo tanto el trabajo de vaciar el depósito esta dado por

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1570\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta_x = \int_2^{10} 1570\pi(10 - x)^2 dx = 1570\pi \left(\frac{2048}{3}\right)$$