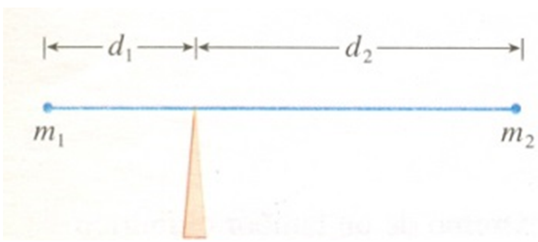
1

Aplicaciones de la Integral

Mommentos y Centros de Masa

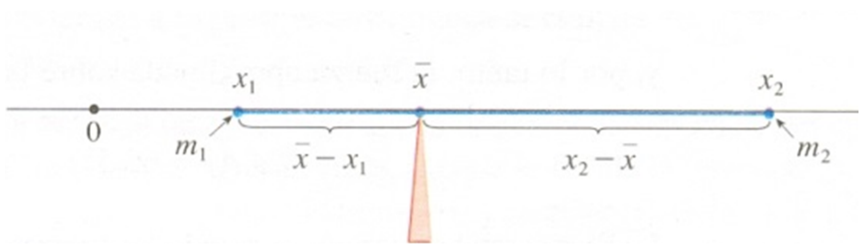
Suponga que tiene una varilla de masa pequeña y en ella se fijan dos masas m_1 y m_2 en lados opuestos de un punto de apoyo y a distancias d_1 y d_2



Tenemos que la varilla esta en equilibrio si

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

Al punto $\overline{x}$ donde la varilla esta en equilibrio se le llama Centro de Masa
Suponga ahora que la varilla se coloca a lo largo del eje X con m_1 en x_1 y m_2 en x_2 y el centro de masa en $\overline{x}$



Tenemos que la varilla esta en equilibrio si

$$m_1(\overline{x} - x_1) = m_2(x_2 - \overline{x}) \;\Rightarrow\; m_2x_2 - m_2\overline{x} = m_1\overline{x} - m_1x_1 \;\Rightarrow\; m_2x_2 + m_1x_1 = \overline{x}(m_1 + m_2)$$

por lo tanto

$$\overline{x} = \frac{m_2x_2 + m_1x_1}{m_2 + m_1}$$

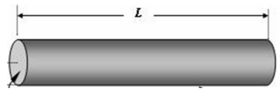
En general si se tiene un sistema de n particulas con masas $m_1, m_2, ..., m_n$ localizados en $x_1, x_2, ..., x_n$ se tendra que

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

A la expresión $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ se le conoce como Momento del sistema respecto al origen

A la expresión $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i$ se le conoce como Masa del sistema

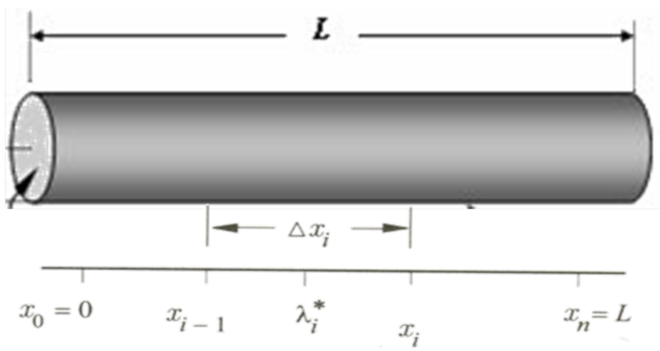
Considere ahora una varilla de masa m y longitud L



la cantidad de masa de una varilla que hay por unidad de longitud define un número llamado Densidad de Varilla y que se denota por ρ.
La densidad se mide en $\frac{kg}{m}$ ó $\frac{g}{cm}$
El coeficiente de densidad ρ puede ser constante $\rho = k$ en cuyo caso se tiene que la masa es homogenea, por otro lado si el coeficiente de densidad es variable $\rho\rho(x)$ entonces la masa no es homogenea.
La relación masa, densidad y longitud esta dada por

$$m = \rho L$$

Si a lo largo de la longitud de la varilla se considera una partición $P = \{x_0 = 0, x_1, ..., x_n = L\}$ y en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se toma un λ_i



si Δ_m es la cantidad aproximada de masa en $[x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$\Delta_{m_i} = \rho(\lambda_i)\Delta_{x_i}$$

donde $\rho(\lambda_i)$ es la densidad de masa en $[x_{i-1}, x_i]$ y $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$
se tiene entonces

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta_{m_i} = \sum_{i=1}^{n} \rho(\lambda_i)\Delta_{x_i} \Rightarrow m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\lambda_i)\Delta_{x_i} = \int_0^L \rho(x)dx$$

mientras que dado el sistema de puntos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ el i-ésimo momento será

$$M_i \approx \Delta_{m_i}\lambda_i = \rho(\lambda_i)\Delta_{x_i}\lambda_i \Rightarrow M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\lambda_i)\Delta_{x_i}\lambda_i = \int_0^L x\rho(x)dx$$

si la masa total m se ubica en un punto $\overline{x}$, entonces $M = \overline{x}m$ y por lo tanto

$$\overline{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x)dx}{\int_0^L \rho(x)dx}$$

si $\rho(x)$ es una función continua en $[0, L]$, entonces el punto $\overline{x}$ es el centro de masa de masa de la barra de longitud L y densidad ρ Éjemplo.-Calcular el centro de masa de la varilla de longitud 6 m cuya densidad en $\frac{kg}{m}$ es $\rho(x) = \sqrt{x+1}$

Para esto se tiene que:

$$m = \int_0^6 \sqrt{x+1}\ dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ |_0^6 = \frac{2}{3}(7\sqrt{7}-1)$$

El momento de masa M

$$M = \int_0^6 x\sqrt{x+1}\ dx \underbrace{=}_{\substack{u=x+1\Rightarrow du=dx\\ u-1=x}} \int_1^7 (u-1)\sqrt{u}\ du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\ |_1^7\ \frac{4}{15}(56\sqrt{7}+1)$$

por lo tanto el centro de masa de la varilla es

$$\overline{x} = \frac{\frac{4}{15}(56\sqrt{7}+1)}{\frac{2}{3}(7\sqrt{7}-1)} = \frac{2}{5}\left(\frac{56\sqrt{7}+1}{7\sqrt{7}-1}\right)$$

Considérese un sistema de n partículas coplanares aisladas de masas $m_1, m_2, ..., m_n$ ubicadas respectivamente en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n)$ sobre el plano coordenado XY

El producto $m_i x_i$ define el momento de masa M_i de la i-ésima partícula respecto al eje Y

$$M_{y_i} = m_i x_i$$

El producto $m_i y_i$ define el momento de masa M_i de la i-ésima partícula respecto al eje X

$$M_{x_i} = m_i y_i$$

Para el caso bidimensional se define el momento de un sistema de partículas respecto al eje Y

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

con respecto al eje X

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

y la suma de las masas define la masa total del sistema

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

Si la masa total del sistema se ubica en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, entonces

$$M_y = m \cdot \overline{x} \quad y \quad M_x = m \cdot \overline{y}$$

por lo tanto

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

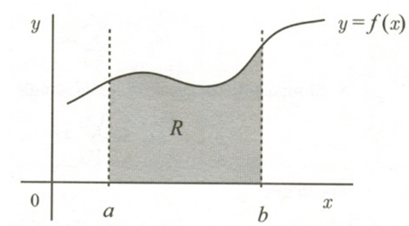
El punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se llama Centro de masa del sistema

Centros de Masa de una Región Plana

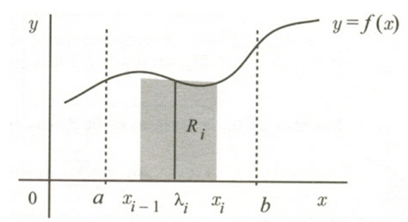
Considérese una placa delgada de masa distribuida homogéneamente, por ejemplo, una hoja de papel o una hojalata plana; lo cual se llamará lámina o región plana.
La cantidad de masa que hay por unidad de área en una lámina define la densidad de la lámina y se denota ρ; por lo que, la densidad de una lámina se mide en $\frac{kg}{m}$ ó $\frac{g}{cm}$ y se relaciona con la masa y el área asi:

$$m = \rho A$$

Si la densidad es constante ($\rho = k$) la masa es homogénea; si no ($\rho = \rho(x, y)$) la masa es no homogénea.
Considére ahora una lámina homogénea de masa m y área A que coincide con una región R del plano limitada por una curva $y = f(x)$, el eje x y por las rectas $x = a$, $x = b$; en donde f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$



Considerése además una partición $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ y un punto muestra λ_i en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición, determinando el i-ésimo rectángulo R_i de base $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ hy altura $f(\lambda_i)$



El centro de masa de un rectángulo es el punto donde se cortan sus diagonales. Por tanto la masa m_i del rectángulo R_i se concentra en el centro de R_i, cuyas coordenadas son $\left(\lambda_i, \frac{1}{2}f(\lambda_i)\right)$. Por lo que
El momento de masa de R_i respecto al eje y, es:

$$M_{y_i} = m_i \cdot \lambda_i$$

El momento de masa de R_i respecto al eje x, es:

$$M_{x_i} = m_i \cdot \left(\frac{1}{2}f(\lambda_i)\right)$$

La masa m_i del rectángulo R_i es:

$$m_i = \rho \cdot A_i = \rho \cdot f(\lambda_i) \cdot \Delta_{x_i}$$

donde A_i es el área de R_i, entonces

$$M_{x_i} = \frac{1}{2}\rho \cdot (f(\lambda_i))^2 \cdot \Delta_{x_i} \quad y \quad M_{y_i} = \rho \cdot \lambda_i \cdot f(\lambda_i) \cdot \Delta_{x_i}$$

por lo tanto el momento de masa M_y respecto al eje y es:

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \lambda_i \cdot f(\lambda_i) \cdot \Delta_{x_i} \ \rightarrow \ M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \lambda_i \cdot f(\lambda_i) \cdot \Delta_{x_i} = \rho \int_a^b x f(x) dx$$

el momento de masa M_x respecto al eje x es:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho \cdot f(\lambda_i)^2 \cdot \Delta_{x_i} \ \rightarrow \ M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho \cdot f(\lambda_i)^2 \cdot \Delta_{x_i} = \frac{1}{2}\rho \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Por otro lado, la masa de la lámina es:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i \ \Rightarrow \ m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot f(\lambda_i) \cdot \Delta_{x_i} \ \Rightarrow \ m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot f(\lambda_i) \cdot \Delta_{x_i} \ \Rightarrow \ m = \rho \int_a^b f(x)\ dx$$

Si la masa total m de la lámina se ubica en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, entonces

$$M_x = m\overline{x} \ \ y \ \ M_y = m\overline{y}$$

por lo tanto

$$\overline{x} = \frac{\rho \int_a^b x f(x) dx}{\rho \int_a^b f(x)\ dx} \ \ y \ \ \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\rho \int_a^b (f(x))^2 dx}{\rho \int_a^b f(x)\ dx}$$

El punto $(\overline{x}, \overline{y})$ es el centro de masa de la lámina. Si se cancela la densidad ρ en las fórmulas anteriores, los números $\overline{x}$ y $\overline{y}$ resultan independientes de la masa y dependientes del área de la región R que representa a la lámina, en cuyo caso a $(\overline{x}, \overline{y})$ se le llama Centroide de la Región R