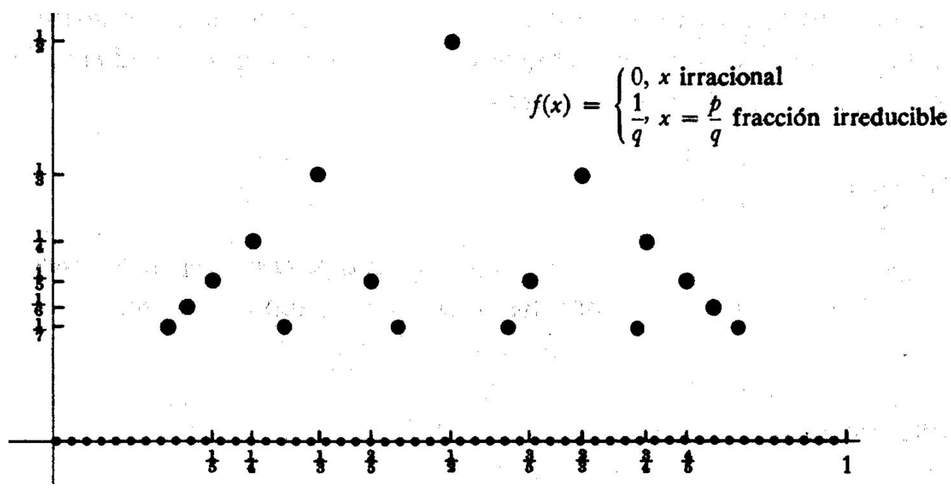
Ser de contenido cero es pues una condición suficiente para que una función sea integrable, pero ¿será necesaria? es decir para que una función sea integrable ¿es necesario que su conjunto de discontinuidades tenga contenido cero? o es posible que f sea integrable aun cuando las discontinuidades no puedan ser encerradas en un número finito de intervalos con longitud tan pequeña como queramos.

Nuestro problema consistiría en utilizar cualquier conjuto que no tenga contenido cero en cualquier intervalo [a,b], para construir una función que sea continua en el [a,b] excepto en dicho conjunto y sea integrable en [a,b].

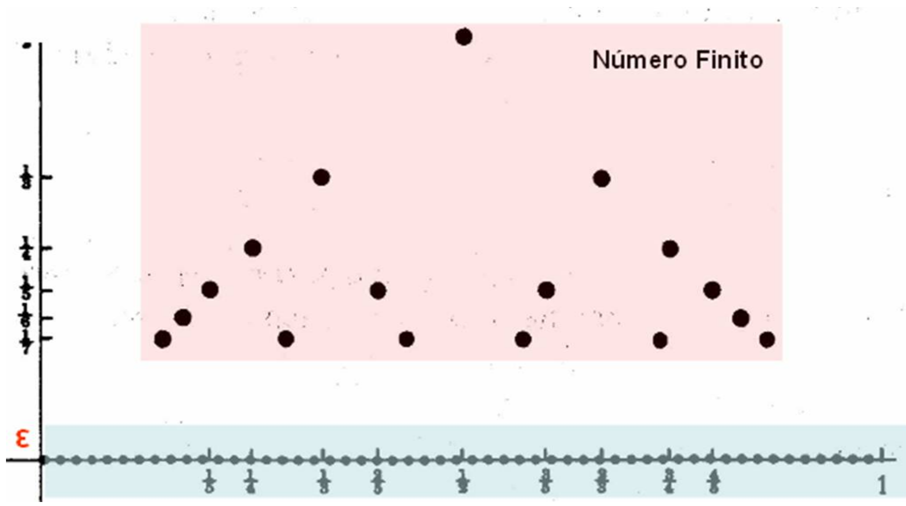
Pues bien Riemann construyo una función con esta característica dicha función es conocida, precisamente como la función de Riemann.

Sea $f : [a, b] \to R$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } (p, q) = 1 \end{cases}$$



Dado $\epsilon > 0$ se cumple que todos los valores de la función, excepto un número finito caen dentro de la franja ϵ



Sea $\epsilon > 0$ por el principio arquimediano sabemos que $\exists n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ asi pues a lo mas n-1 valores son mayores iguales que ϵ.

Vamos a ver que la función $f : [a, b] \to R$ de Riemann es continua en $I \cap [0, 1]$. Queremos demostrar que f es continua en $i_\alpha \in I$ es decir

$$\lim_{x \to i_0} f(x) = f(i_0) = 0$$

Por demostrar que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \Rightarrow \forall x \in V_\delta \cap [0, 1]$$

se tiene que $|f(x)| < \epsilon$

Sea $\epsilon > 0$ por el resultado anterior existen racionales que bajo la función son mayores iguales que ϵ

Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ estos racionales y sea x_r el más cercano a i_α. Sea

$$\delta = \frac{|x_r - i_0|}{2} > 0$$

Se tiene que $x_1, x_2, ..., x_n$ no pertenecen a $V_\delta(i_0) \cap [0, 1]$

Asi que $f(x) = 0 < \epsilon$ si $x \in I \cap V_\delta(i_0) \cap [0, 1]$ y $f(x) < \epsilon$ si $x \in Q \cap V_\delta(i_0) \cap [0, 1]$ de donde $|f(x)| < \epsilon$ $\forall x \in V_\delta(i_0) \cap [0, 1]$ por lo cual f es continua en i_0 $\forall i \in I \cap [0, 1]$ en consecuencia f es continua en $I \cap [0, 1]$.

Por lo tanto la función de Riemann sería continua en I y por tanto integrable