La Integral como función del limite superior (Integral Indefinida)

Definición 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si $\exists\ F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$, decimos que F es una función primitiva de f en $[a, b]$*

Definición 2. *Al conjunto de todas las primitivas de una función f se le llama Integral Indefinida y se le denota*

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Algunas propiedades de la integral indefinida

$$a) \quad \frac{d\left(\int f(x)dx\right)}{dx} = \frac{d(F(x)+c)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

$$b) \quad \int f'(x)dx = f(x)$$

Ejemplos para la tabla de integrales

1.-$\displaystyle\int \sec(x)dx = Ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + c$

justificación

$$como \quad \sec(x) = \frac{\sec(x)\left(\sec(x)+\tan(x)\right)}{\sec(x)+\tan(x)} = \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}$$

y de aquí

$$\frac{d\left(Ln(|\sec(x)+\tan(x)|)+c\right)}{dx} = \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}$$

2.-$\displaystyle\int \csc(x)dx = -Ln(|\csc(x) + \cot(x)|) + c$

justificación

$$como \quad \csc(x) = \frac{\csc(x)\left(\csc(x)+\cot(x)\right)}{\csc(x)+\cot(x)} = \frac{\csc^2(x)+\csc(x)\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)}$$

y de aquí

$$\frac{d\left(-Ln(|\csc(x)+\cot(x)|)+c\right)}{dx} = -\frac{-\csc^2(x)-\csc(x)\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)} = \frac{\csc^2(x)+\csc(x)\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)}$$

3.-$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$

justificación

Tenemos que si $f(x) = \tan(x)$ entonces $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ por lo tanto

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}$$

por otro lado

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x) \quad \Rightarrow \quad \sec^2(\arctan(x)) = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + \left[\tan(\arctan(x))\right]^2 = 1 + x^2$$

de aquí

$$\frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

y en consecuencia

$$\frac{d\arctan(x)+c}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

4.- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + c$
justificación
Tenemos que si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ entonces $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ por lo tanto

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

por otro lado

$$\cos(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)} \quad\Rightarrow\quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-[\operatorname{sen}(\arcsin(x))]^2} = \sqrt{1-x^2}$$

de aquí

$$\frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y en consecuencia

$$\frac{d\arcsin(x)+c}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5.- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x) + c$
justificación
Tenemos que si $f(x) = \cos(x)$ entonces $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ por lo tanto

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))}$$

por otro lado

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-[\cos(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2}$$

de aquí

$$\frac{-1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y en consecuencia

$$\frac{d\arcsin(x)+c}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

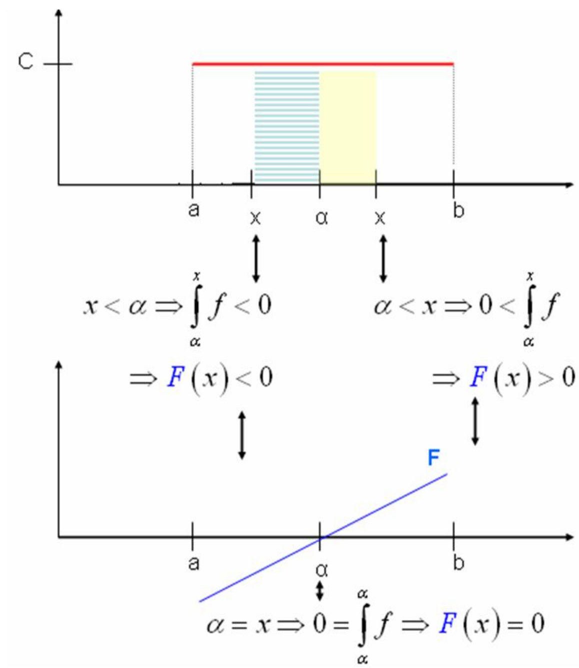
Definición 3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, con base en la función f, podemos construir una nueva función a través de la siguiente regla de correspondencia*

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f$$

donde α es una constante fija en [a,b] y x cualquier valor de [a,b].

Para cada $x \in [a, b]$, $\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f$ determina uno y sólo un valor, de esta forma $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es efectivamente una función a esta función se le llama Ïntegral como límite superior".

Sea f(x)=C con $C > 0$ entonces

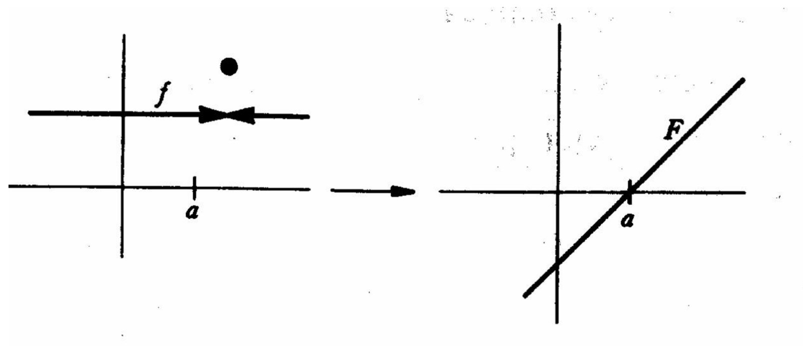


Si tomamos x a la derecha de α obtenemos un rectángulo cuya base mide $x - \alpha$ y de altura mide C y por tanto el área es (x-a)c=xc-xa.

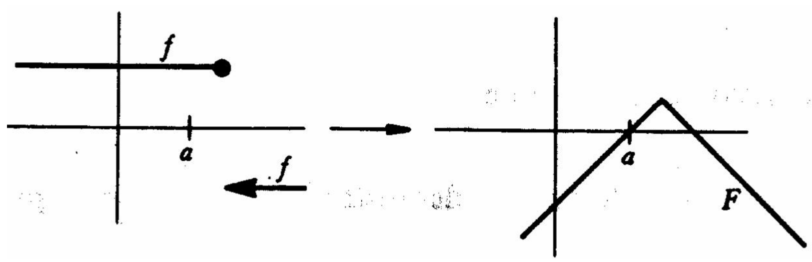
Si x está a la izquierda de α obtenemos exactamente la misma expresión solo que $(x - \alpha)$ es negativo.

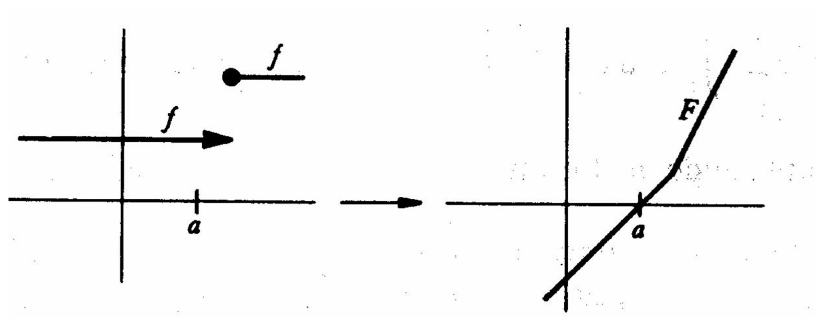
De esta manera F(x) es una recta y como $\int_{\alpha}^{\alpha} f = 0$ tenemos una función F creciente. En la siguiente figura se muestran algunos casos del comportamiento de F, dependiendo si f es creciente, decreciente, discontinua, positiva o negativa

f con una discontinuidad removible



f con una discontinuidad esencial





Teorema 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x}$$

es continua en [a,b].

Demostración. Vamos a ver que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \forall x \in [a, b] |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \epsilon$$

Sea $\epsilon > 0$ entonces

$$|F(x) - F(x_0)| = |\int_{\alpha}^{x} f - \int_{\alpha}^{x_0} f| = |\int_{\alpha}^{x} f + \int_{x_0}^{\alpha} f| = |\int_{x_0}^{x} f| \leq \int_{x_0}^{x} |f| \leq M \int_{x_0}^{x} dt$$

$$= M(x - x_0) < M\delta = M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Si $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$, estamos considerando ademas que f es acotada.

Por lo tanto F es continua. $\square$

Es de esperarse que si f es continua en x_0 entonces F sea derivable en x_0.

Teorema.- (1er Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f : [a, b] \to R$, integrable en [a,b] y continua en x_0, entonces la función $f : [a, b] \to R$ definida por $F(x) = \int_a^{x_0} f(t)dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$

Idea de la demostración

Tenemos que $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ y sean

$m_h = inf\{f(t)|t \in [x_0, x] = [x_0, x_0 + h]\}$

$M_h = sup\{f(t)|t \in [x_0, x] = [x_0, x_0 + h]\}$

entonces

$$mh(f)(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq Mh(f)(x - x_0)$$

y

$$mh(f) \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq Mh(f)$$

y calculamos el límite

$$\lim_{x\to x_0} mh(f) \leq \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq \lim_{x\to x_0} Mh(f)$$

Como f es continua en x_0 entonces

$$\lim_{x\to x_0} mh(f) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0} Mh(f)$$

Por lo tanto

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$