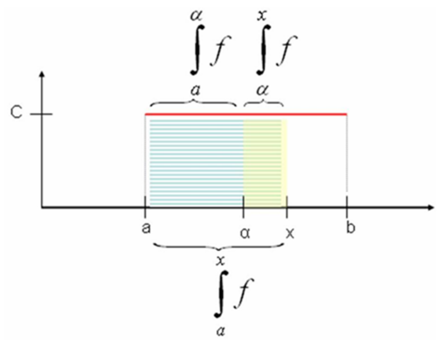
Teorema Fundamental del Cálculo)

Si consideramos

$$F(x) = \int_a^x f$$

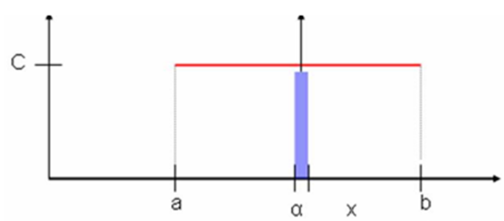
Tenemos que



$$F(x) - F(\alpha) = \int_a^x f - \int_a^\alpha f = \int_\alpha^x f$$

Si x esta suficientemente cercano a α, la diferencia
$F(x) - F(\alpha) = (x - \alpha) f(\alpha)$ es decir $F(x) - F(\alpha) = f(\alpha)$

$$(x - \alpha) f(\alpha)$$



$$F(x) - F(\alpha) \approx f(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} \approx f(\alpha)$$

Si x y α estan suficientemente cercanos

$$\frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} \approx F'(\alpha)$$

Es de esperar que

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha)$$

Por lo tanto

$$F'(\alpha) = f(\alpha)$$

De esta manera se tiene que $F(x)=\int_a^x f$ es una primitiva de f, por lo tanto pertenece al conjunto de primitivas de f al cual llamamos

$$\int f(x)dx$$

Algunas propiedades:
Si F es una primitiva de f y G es una primitiva de G

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x)+G(x)+C$$

por otro lado

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+C_1+G(x)+C_2$$

si tomamos $C=C_1+C_2$ tenemos que

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Ahora bien

$$\int kf(x)dx = kF(x)+C_1$$

mientras que

$$k\int f(x)dx = k\left(F(x)+C_2\right) = kF(x)+kC_2$$

y tomando $C_1=kC_2$ se tiene que

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Ejemplos.-Hallar las integrales

$$1)\qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)}+C$$

Justificación:

$$\frac{d\left(\frac{a^x}{\ln(a)}+C\right)}{dx} = \frac{\left(\frac{a^x}{\ln(a)}\right)}{dx} = \frac{1}{\ln(a)}\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{1}{\ln(a)}a^x\ln(a) = a^x$$

$$2)\qquad \int \frac{1}{1+\cos(x)}dx = \tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

Justificación: Según la identidad

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \quad\Rightarrow\quad 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1+\cos(x)$$

$$\therefore\quad \int \frac{1}{1+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \int \frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}dx$$

$$\therefore\quad \frac{d\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C}{dx} = \frac{d\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{dx} = \frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$$

$$3) \quad \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \left(\frac{\ln(x+a)}{\ln(x-a)} \right) + C$$

Justificación:

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{-2a}{2a\left(x^2 - a^2\right)} = \frac{x - a - (x+a)}{2a\left(x^2 - a^2\right)} = \frac{x-a}{2a\left(x^2 - a^2\right)} - \frac{(x+a)}{2a\left(x^2 - a^2\right)} = \frac{1}{2a(x+a)} - \frac{1}{2a(x-a)}$$

$$\therefore \quad \frac{d\left(\frac{1}{2a}\left(\frac{\ln(x+a)}{\ln(x-a)}\right) + C\right)}{dx} = \frac{1}{2a}\frac{d\left(\frac{\ln(x+a)}{\ln(x-a)}\right)}{dx} = \frac{1}{2a}\frac{d\left(\ln(x+a) - \ln(x-a)\right)}{dx} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a}\right)$$

$$4) \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Justificación:

$$\frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d\left(\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C\right)}{dx} = \frac{1}{a}\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a}$$

Teorema 1. *(2do Teorema fundamental del cálculo) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en [a,b] si $g : [a.b] \to \mathbb{R}$ es cualquier función derivable, tal que $g'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Demostración. Sea P una partición del intervalo $[a,b]$ $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ entonces para el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se tiene que según el teormea del valor medio

$$\frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = g'(x_i^*) \quad \Rightarrow \quad g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \quad \Rightarrow \quad g(x_i) - g(x_{i-1}) = f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

por otro lado si

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad y \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

entonces

$$m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i \quad \Rightarrow \quad m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \; m_i(x_i - x_{i-1}) \leq g(x_i) - g(x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(x_i) - g(x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f,P) \leq g(b) - g(a) \leq \overline{S}(f,P) \quad \Rightarrow \quad \sup\left(\underline{S}(f,P)\right) \leq g(b) - g(a) \leq \inf\left(\overline{S}(f,P)\right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \leq g(b) - g(a) \leq \int_a^b f \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f = g(b) - g(a)$$

□

Ejemplos.- Hallar la derivada de $F(x) = \int_a^x \frac{1}{1+\text{sen}^2(t)}dt$
Para esto se tiene que

$$F'(x) = \left(\int_a^x \frac{1}{1+\text{sen}^2(t)}dt\right)' = \frac{1}{1+\text{sen}^2(x)}$$

Hallar la derivada de $F(x) = \int_a^{x^2} \text{sen}(t)dt$
Para esto vamos a definir

$$h(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = \int_a^x \text{sen}(t)dt$$

de tal manera que

$$h'(x) = 2x \ \ y \ \ g'(x) = \text{sen}(x)$$

ademas

$$F(x) = g(h(x)) = g(x^2) = \int_a^{x^2} \text{sen}(t)dt$$

$$\therefore \quad F'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x))h'(x) = \text{sen}(x^2)2x$$