Integrales Impropias

Vamos a extender el concepto de integral a funciones no acotadas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y a funciones continuas en intervalos no acotados, a este tipo de integrales se les conoce como integrales impropias

(Integral Impropia de 1er Clase)

Definición 1. *Si $f(x)$ es continua en $a < x < \infty$ entonces*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Definición 2. *Si $f(x)$ es continua en $-\infty < x < b$ entonces*

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Definición 3. *Si $f(x)$ es continua en $-\infty < x < \infty$ entonces*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si el limite existe, la integral impropia es convergente; si no, es divergente
Ejemplo.-Vamos a comprobar la convergencia de las siguientes integrales

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1}\right) = 1$$

por lo tanto la integral impropia es convergente
Ejemplo.-Calcular $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ tenemos que

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty} e^0 - e^a = 1 - 0 = 1$$

Ejemplo.-Calcular $\int_{-\infty}^\infty \frac{4}{(2|x|+1)^2}dx$ tenemos que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{4}{(2|x|+1)^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{4}{(-2x+1)^2}dx + \int_0^\infty \frac{4}{(2x+1)^2}dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{4}{(-2x+1)^2}dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{4}{(2x+1)^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{2}{1-2x}\Big|_a^0\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-2}{2x+1}\Big|_0^b\right)$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{2}{1-2(0)} - \cancel{\frac{2}{1-2(a)}}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\cancel{\frac{-2}{2(b)+1}} - \frac{-2}{2(0)+1}\right) = 2 + 2 = 4$$

(Integral Impropia de 2da Clase)

Definición 4. *Si* $f(x)$ *es continua en* $a < x \leq b$ *y* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{w \to a^+} \int_w^b f(x)dx$$

Definición 5. *Si* $f(x)$ *es continua en* $a \leq x < b$ *y* $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{w \to b^-} \int_a^w f(x)dx$$

si el limite existe, la integral impropia es convergente; si no es divergente

Ejemplo.- Calcular la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ tenemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0} 2\sqrt{x}|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2$$

Ejemplo.- Calcular la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ tenemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \to 1^-} \int_0^\epsilon \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \to 1^-} (\arcsin(\epsilon) - \arcsin(0)) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Es posible que se de una combinación de los dos tipos de integrales impropias

Ejemplo calcular $\int_0^\infty f(x)dx$ si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & si \quad x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

tenemos que

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = 2 + 1 = 3$$