Criterios de Convergencia de las Integrales Impropias

Lema 1. *Sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ integrable en $[t,b]$ $\forall\ t\ \in\ (a,b]$, no negativa y no acotada. Entonces la función*

$$F(t)=\int_t^b f(x)dx$$

es decreciente

Demostración. Si $t_1,t_2\in(a,b]$ son tal que $t_1\leq t_2$ entonces se tiene que

$$F(t_1)=\int_{t_1}^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx+\int_{t_2}^b f(x)dx\geq\int_{t_2}^b f(x)dx=F(t_2)$$

por lo tanto $f(t_1)\geq F(t_2)$ y F es decreciente □

Teorema 1. *Sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ integrable en $[t,b]$ $\forall\ t\ \in\ (a,b]$, no negativa y no acotada. Entonces*

$$\int_{a^+}^b f(x)dx\ \ es\ \ convergente\ \ \Leftrightarrow\ \ F(t)=\int_t^b f(x)dx\ \ esta\ \ acotada\ \ superiormente$$

Demostración. ($\Rightarrow$)Si $\displaystyle\int_{a^+}^b f(x)dx\ \ es\ \ convergente$ entonces

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}F(t)=L\in\mathbb{R}$$

como $F(t)$ es decreciente entonces $F(t)\leq L$ y por tanto $F(t)$ esta acotada superiormente
($\Leftarrow$)Si $F(t)$ esta acotada superiormente existe

$$\sup\{F(t)\ \ |\ \ t\in(a,b]\}=\alpha$$

vamos a ver que $\alpha=\lim\limits_{t\to a^+}F(t)$ Sea $\epsilon>0$. Entonces existe $t'\in(a,b]$ tal que $\alpha-\epsilon\leq F(t')$ luego si $t\leq t'$ como $F(t)$ es decreciente

$$\alpha-\epsilon\leq F(t')<F(t)$$

por otro lado

$$F(t)\leq\alpha<\alpha+\epsilon$$

$$\therefore\quad \alpha-\epsilon\leq F(t')<F(t)\leq\alpha<\alpha+\epsilon\ \ \Rightarrow\ \ \alpha-\epsilon<F(t)<\alpha+\epsilon\ \ \Rightarrow\ \ |F(t)-\alpha|<\epsilon$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to a^+}F(t)=\alpha$$

□

Criterio de Comparación

Teorema 2. *Suponga que $a < b$ y $\forall\ x\ \in (a,b)$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Si $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ son integrables y $\int_a^b g$ convergente entonces $\int_a^f f$ también*

Demostración. Como
$$0 \leq \int_a^t f \leq \int_a^t g$$
entonces el conjunto
$$\{\int_a^t f | t > a\}$$
es un conjunto acotado superiormente, entonces tiene supremo; como $F(t) = \int_a^t f$ es creciente, entonces el límite cuando $t \to b^-$ de F existe y por tanto

$$\int_a^b f \qquad existe$$

$\square$

Ejemplos.-Determinar la convergencia o divergencia de las integrales impropias

$$a) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+x}dx$$

$$b) \quad \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx$$

$$c) \quad \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{\pi - x}}dx$$

Para la primera tenemos que

$$x^2 + x \leq 2x \ \Rightarrow \ \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x^2+x} \ \ \Rightarrow \ \int_0^1 \frac{1}{2x}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2+x}$$

pero la primer integral es divergente pues

$$\int_0^1 \frac{1}{2x}de = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\left(\ln(1) - \ln(0)\right) \quad el \quad cual \quad \nexists$$

por lo tanto

$$a) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+x}dx \quad es \quad divergente$$

Para la segunda integral se tiene

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx = \int_2^{2,5} \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx + \int_{2,5}^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx$$

Para el primer sumando

$$(3-x)(x-2) \geq \frac{x-2}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{(3-x)(x-2)} \geq \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} \geq \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}$$

$$\therefore \quad \int_2^{2,5} \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx \leq \int_2^{2,5} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}dx = \sqrt{2}\left(2\sqrt{x-2}\,\Big|_{2,5}^{3}\right) = 2$$

Para el segundo sumando

$$(3-x)(x-2) \geq \frac{3-x}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{(3-x)(x-2)} \geq \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-x}} \geq \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}$$

$$\therefore \quad \int_{2,5}^{3} \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx \leq \int_{2,5}^{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-x}}dx = \sqrt{2}\left(-2\sqrt{3-x}\,\Big|_{2,5}^{3}\right) = 2$$

$$\therefore \quad \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx \quad es \quad convergente$$

Existen criterios analogos para las integrales impropias de funciones continuas definidas en intervalos no acotados

Criterio de Comparación

Teorema 3. *Suponga que* $\forall\ x > a$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *es convergente entonces* $\int_a^{+\infty} f$ *también*