Criterios de Convergencia de las Integrales Impropias parte 2

Fórmula de sustitución
Si f y g son funciones continuas entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$$

Demostración. Sea F tal que $F' = f$ una primitiva de f, se tiene entonces que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b F'(g(x))g'(x)dx = \int_a^b (F(g(x)))'\,dx = F(g(x))\,\Big|_a^b = F(g(b))-F(g(a)) = F\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} F'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

□

Ejemplo.-Calcular

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

tenemos que sea $t = x^2$ entonces $dt = 2xdx$ por lo tanto

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx =^{\frac{1}{2}} \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}\int (1+t)^{-\frac{1}{2}} = (1+t)^{\frac{1}{2}} + C$$

Si tenemos la integral impropia

$$\int_a^{b^-} f(x)dx \quad hacemos \quad t = \frac{1}{b-x} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{b^-} f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(b-\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$$

Si tenemos la integral impropia

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx \quad hacemos \quad t = \frac{1}{x-a} \quad \Rightarrow \quad \int_{a^+}^{b} f(x)dx = \int_{+\infty}^{\frac{1}{b-a}} -\frac{f\left(a+\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} -\frac{f\left(a+\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$$

Por lo tanto una integral impropia de la 1er clase se puede transformar en una integral impropia de la 2da clase, y los criterios de convergencia para ambas son similares.
Ejemplos.-Comprobar la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx$
tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx + \int_1^\infty \frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx$$

En la primer integral se tiene que el integrando $\dfrac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}}$ es continua en $[0,1]$ por lo tanto es integrable en $[0,1]$.

Veamos la segunda integral

$$1+x^{\frac{3}{2}} \leq 2x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2x^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \int_1^{\infty} \frac{xdx}{2x^{\frac{3}{2}}} \leq \int_1^{\infty} \frac{xdx}{1+x^{\frac{3}{2}}}$$

y se tiene que

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{2x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{b\to\infty} \sqrt{x}\,\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\sqrt{b}-\sqrt{1}) \quad el \quad cual \quad \nexists$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}} dx \quad es \quad divergente$$

Ejemplos.-Comprobar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+x}} dx$
tenemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+x}dx} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

El primer sumando es continuo en $[0,1]$ por lo tanto es integrable en $[0,1]$
Para el segundo sumando se tiene

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \lim_{b\to\infty} \left(2\sqrt{1+x}\,\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty} \left(2\sqrt{1+b} - (2\sqrt{2}\right) \quad el \quad cual \quad \nexists$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+x}} dx \quad es \quad divergente$$

Fórmula de integración por partes
Si f,g son funciones tales que f' y g' existen y $\displaystyle\int gdf$ existe, entonces también existe $\displaystyle\int fdg$ y

$$\int fdg = fg - \int gdf$$

Demostración. tenemos que

$$\frac{d\left(fg - \int gdf\right)}{dx} = fg' + g'f - gf' = fg'$$

por lo tanto la expresión $fg - \displaystyle\int gdf$ es una primitiva para fg'
Ejemplo.- Calcular $\displaystyle\int \log(x)dx$
tenemos que

$$\int \log(x)dx \underbrace{=}_{\substack{f=\log(x) \;\Rightarrow\; f'=\frac{1}{x} \\ g'=1 \;\Rightarrow\; g=x}} x\log(x) - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx = x\log(x) - x + c$$

$\square$

Función Gamma

Una de las funciones más importantes del análisis es la

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

Lo primero es estudiar la convergencia o divergencia de esta integral, para ello conviene separar la integral como sigue:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

tenemos que si $t > 0$ entonces $0 < e^{-t} < 1$ por lo tanto

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt < \int_0^1 t^{x-1}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 t^{x-1}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{t^x}{x}\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}$$

si $x > 0$ entonces la integral es convergente

Si $x = 0$

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{-1}dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^1 \frac{dt}{e^{-t}t}$$

como $2 < e^t < 3$ entonces $te^t < 3t$ por lo tanto $\dfrac{1}{3t} < \dfrac{1}{e^t t}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{3t} < \int_0^1 \frac{dt}{e^t t} \quad y \quad como \quad \int_0^1 \frac{dt}{3t} \quad diverge$$

entonces $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dx$ diverge

Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y $1 - x > 1$ por lo tanto $t^{1-x} < t \quad \Rightarrow \quad e^{-t}t^{1-x} < e^{-t}t < 3t$ por lo tanto

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt > \int_0^1 \frac{dt}{e^{-t}t} > \int_0^1 \frac{dt}{3t} \quad la \quad cual \quad diverge$$

entonces $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dx$ diverge

Para la segunda integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ examinamos dos casos

1er caso $x \leq 1$

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \int_1^\infty e^{-t}t^{-(1-x)}dt = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt \qquad como \qquad t \in [0,1] \qquad \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \leq e^{-t}$$

por lo tanto

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \leq \int_1^\infty e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty} e^{-t}|_1^b = -\lim_{b\to\infty} e^{-b} - e^{-1} = \frac{1}{e}$$

de modo que para $0 < x \leq 1$ las integrales convergen y $\Gamma(x)$ converge.
Ahora para $x > 1$ notamos que $e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}t^{x+1}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ y hacemos $f(t) = e^{-t}t^{x+1}$
para esta función se tiene

$$f'(x) = (x+1)t^x(e^{-t})+t^{x+1}(-e^{-t}) \;\Rightarrow\; f' = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)t^x(e^{-t})+t^{x+1}(-e^{-t}) = 0 \;\Leftrightarrow e^{-t}t^x(x+1-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = x+1$$

por lo tanto

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1} = \int_1^\infty e^{-t}t^{x+1}\left(\frac{1}{t^2}\right) < \int_1^\infty (x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= (x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}\int_1^\infty \left(\frac{1}{t^2}\right)dt = (x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{t}\Big|_1^b\right) = (x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}$$

la cual es convergente.
Algunas de las propiedades de la función Gamma

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-t}}_{dv=e^{-t}}\underbrace{t^x}_{u=t^x}dt = t^x(-e^{-t})|_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{-e^{-t}}_{v}\underbrace{-txt^{x-1}}_{du}dt = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x)$$