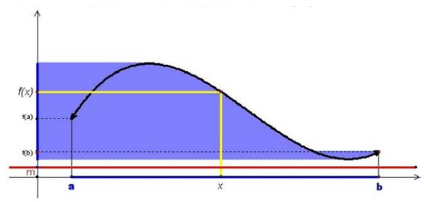
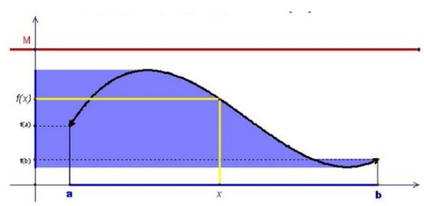
Sumas Superiores e inferiores (ó Sumas de Riemann)

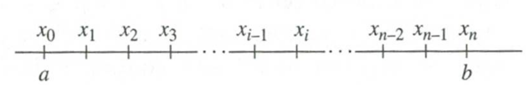
Definición 1. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se dice que f esta acotada superiormente sobre $[a,b]$, cuando existe algún $M\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)\leq M\ \forall\ x\ \in\ [a,b]$*



Definición 2. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se dice que f esta acotada inferiormente sobre $[a,b]$, cuando existe algún $m\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)\geq m\ \forall\ x\ \in\ [a,b]$*



Definición 3. *Una partición del intervalo $[a,b]$ es un subconjunto $P=\{a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b\}\subset[a,b]$ tal que $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ y la denotamos $P_{[a,b]}$*



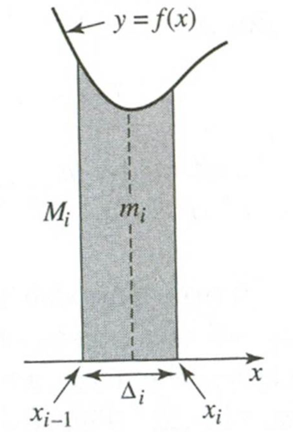
Ejemplo.- $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1\right\}$ es una partición de $[a,b]$ y esto lo denotamos $P\in P_{[a,b]}$
Para $i=1\cdots,n$ el n-ésimo subintervalo de P será $[x_{i-1},x_i]$.

Definición 4.

$$m_i=\inf f[x_{i-1},x_i]=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

$$M_i=\sup f[x_{i-1},x_i]=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

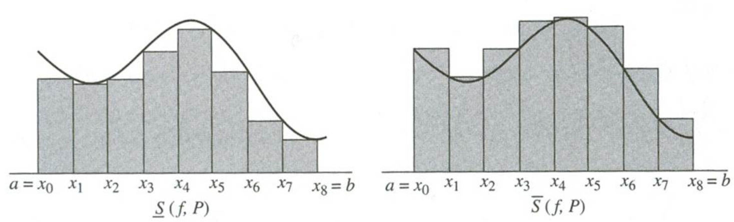
$$\Delta_i=x_i-x_{i-1}$$



Definición 5. *Para cada partición $P_{[a,b]}$ se tiene que*

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \quad Sumas \quad Inferiores \quad para \quad f \quad sobre \quad P$$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \quad Sumas \quad Superiores \quad para \quad f \quad sobre \quad P$$



Lema 1. *Para toda partición P de $[a,b]$ se tiene que $\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P)$*

Demostración. Como $m_i \leq M_i$ entonces

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \overline{S}(f,P)$$

□

Definición 6. *Dada una partición $P \in P_{[a,b]}$ decimos que Q es un refinamiento de la partición P sobre $[a,b]$ si $P \subseteq Q$*

Ejemplo.-Un refinamiento de $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ es $P^* = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

Teorema 1. *Si Q es un refinamiento de P, entonces*

$$a) \quad \underline{S}(f,Q) \geq \underline{S}(f,P) \quad y \quad b) \quad \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$$

Demostración. Supongamos que Q es un refinamiento de una partición P de $[a,b]$. Entonces Q contiene todos los puntos de P, y quizas algunos mas. Vamos a considerar el caso donde Q contiene solo un punto mas que P. Dicho punto lo denotaremos $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$. DE esta forma

$$Q = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k^*, x_k, \cdots, x_n\}$$

por tanto tenemos que
Para el inciso a)

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,Q) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i\Delta_i + \text{ínf} f[x_{k-1}, x_k^*](x_k^* - x_{k-1}) + \text{ínf} f[x_k^*, x_k](x_k - x_k^*) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i\Delta_i \\
&\geq \sum_{i=1}^{k-1} m_i\Delta_i + m_k(x_k^* - x_{k-1}) + m_k(x_k - x_k^*) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i\Delta_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} m_i\Delta_i + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i = \underline{S}(f,P)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \underline{S}(f,Q) \geq \underline{S}(f,P)$$

Para el inciso b)

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,Q) &= \sum_{i=1}^{k-1} M_i\Delta_i + \sup f[x_{k-1}, x_k^*](x_k^* - x_{k-1}) + \sup f[x_k^*, x_k](x_k - x_k^*) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i\Delta_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} M_i\Delta_i + M_k(x_k^* - x_{k-1}) + M_k(x_k - x_k^*) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i\Delta_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} M_i\Delta_i + M_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i = \overline{S}(f,P)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$$

□

Teorema 2. *Si P y Q son particiones cualesquiera de $[a,b]$, entonces* $\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$

Demostración. Supongamos que P y Q son particiones cualesquiera de $[a, b]$. Entonces $P \bigcup Q$ es un refinamiento tanto de P como de Q y según el resultado anterior $\underline{S}(f, Q) \leq \underline{S}(f, P \bigcup Q)$ y $\overline{S}(f, Q) \geq \overline{S}(f, P \bigcup Q)$ de esta forma se tiene que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P \bigcup Q) \leq \overline{S}(f, P \bigcup Q) \leq \overline{S}(f, Q)$$
$$\therefore \quad \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$$

□

Definición 7. *Sean*

$$A = \{\underline{S}(f, P) : P \quad es \quad partición \quad de \quad [a, b]\}$$
$$B = \{\overline{S}(f, P) : P \quad es \quad partición \quad de \quad [a, b]\}$$

Tenemos que todo elemento de A es $\leq$ que todo elemento de B, por lo tanto, el conjunto A esta acotado superiormente y por tanto existe $\sup A$

Definición 8.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup A = \sup\{\underline{S}(f, P) : P \quad es \quad partición \quad de \quad [a, b]\}$$

esta cantidad es llamada la integral inferior de f sobre $[a, b]$

De manera analoga tenemos que todo elemento de B es $\geq$ que todo elemento de A, por lo tanto, el conjunto B esta acotado inferiormente y por tanto existe $\inf B$

Definición 9.

$$\overline{\int_a^b} f = \inf B = \inf\{\overline{S}(f, P) : P \quad es \quad partición \quad de \quad [a, b]\}$$

esta cantidad es llamada la integral superior de f sobre $[a, b]$

Teorema 3. *Si f es una función definida y acotada en $[a, b]$, entonces ambas integrales, la inferior y la superior existen y además*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Demostración. Dado que todo elemento de A es $\leq$ que todo elemento de B de la desigualdad $\sup A \leq \inf B$ se sigue

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

□

Definición 10. *Una función f definida y acotada sobre $[a, b]$ es integrable si*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

en este caso al valor comun de estas integrales lo llamaremos La integral de Riemann de f sobre $[a, b]$ y la denotaremos

$$\int_a^b f$$

Ejemplo.-Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada asi: $f(x) = e^x \ \forall \ x \ \in \ [a, b]$.
En este caso f es una función acotada y si $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n}, \cdots, a + n\frac{b-a}{n} = b\right\}$ es una partición sobre $[a, b]$ entonces

$$m_i = \inf\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = e^{x_{i-1}} \quad para \quad i = 1, 2, , \cdots, n$$

y

$$M_i = \sup\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = e^{x_i} \quad para \quad i = 1, 2, , \cdots, n$$

por lo tanto

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} e^{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_{i-1}} \left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)\frac{b-a}{n}} \left(\frac{b-a}{n}\right) = e^a \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)\frac{b-a}{n}}$$

$$= e^a \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{(i-1)} \underbrace{=}_{1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}} = e^a \left(\frac{b-a}{n}\right) \frac{1 - e^{b-a}}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}}$$

Para hallar el supremo debemos recurrir al limite

$$\lim_{n\to\infty} e^a \left(\frac{b-a}{n}\right) \frac{1 - e^{b-a}}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}} = e^a \left(1 - e^{b-a}\right) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b-a}{n}}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}} \underbrace{=}_{L\acute{h}opital} e^a \left(1 - e^{b-a}\right) \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{b-a}{n^2}}{-e^{\frac{b-a}{n}} \left(-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= -e^a(1 - e^{b-a}) = e^b - e^a$$