Continuación: Sumas Superiores e inferiores (ó Sumas de Riemann)

Ejemplo.-Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada asi: $f(x) = e^x \ \forall \ x \ \in \ [a, b]$.
En este caso f es una función acotada y si $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n}, \cdots, a + n\frac{b-a}{n} = b\right\}$ es una partición sobre $[a, b]$ entonces

$$M_i = \inf\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = e^{x_{i-1}} \quad para \ \ i = 1, 2, , \cdots, n$$

y

$$M_i = \sup\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = e^{x_i} \quad para \ \ i = 1, 2, , \cdots, n$$

por lo tanto

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{a+(i)\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right) = e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{(i)\frac{b-a}{n}}$$

$$= e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{(i)} \underbrace{=}_{1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}} e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} - 1$$

$$= e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n+1} - \left(1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)\right)}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{e^{\frac{b-a}{n}} - \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)e^{\frac{b-a}{n}}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}\right)$$

$$= e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)e^{\frac{b-a}{n}}\left(\frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}\right)$$

Para hallar el supremo debemos recurrir al limite

$$\lim_{n\to\infty} e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)e^{\frac{b-a}{n}}\frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = e^a\left(1-e^{b-a}\right)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{b-a}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} \underbrace{=}_{L\acute{}hopital} e^a\left(1-e^{b-a}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{b-a}{n^2}}{-e^{\frac{b-a}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= -e^a(1-e^{b-a}) = e^b - e^a$$

por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} e^x = \sup\{\underline{S}(f, P) : P \ \ es \ \ partici\acute{o}n \ \ de \ \ [a, b]\} = e^b - e^a$$

y

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}(f, P) : P \ \ es \ \ partici\acute{o}n \ \ de \ \ [a, b]\} = e^b - e^a$$

por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} f = e^b - e^a = \overline{\int_a^b} f$$

por lo tanto f es integrable sobre $[a, b]$ y $\displaystyle\int_a^b f = e^b - e^a$

Ejemplo.-Sea $c \in \mathbb{R}$ sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada asi: $f(x) = c \ \forall \ x \ \in \ [a,b]$.
En este caso f es una función acotada y si $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ es una partición sobre $[a,b]$ entonces

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \text{ínf}\{c\} = c \quad para \ \ i = 1, 2, , \cdots, n$$

y

$$M_i = \sup\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \sup\{c\} = c \quad para \ \ i = 1, 2, , \cdots, n$$

por lo tanto

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b-a)$$

y

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b-a)$$

por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f, P) : P \ \ es \ \ partición \ \ de \ \ [a,b]\} = \sup\{c(b-a)\} = c(b-a)$$

y

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{\overline{S}(f, P) : P \ \ es \ \ partición \ \ de \ \ [a,b]\} = \text{ínf}\{c(b-a)\} = c(b-a)$$

por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} f = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f$$

por lo tanto f es integrable sobre $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b f = c(b-a)$

Ejemplo.-Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada asi: $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in I \bigcap [0,1] \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1] \end{cases}$
En este caso f es una función acotada y si $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ es una partición sobre $[0,1]$ entonces

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \text{ínf}\{0, 1\} = 0 \quad para \ \ i = 1, 2, , \cdots, n$$

y

$$M_i = \sup\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \sup\{0, 1\} = 1 \quad para \ \ i = 1, 2, , \cdots, n$$

por lo tanto

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 0(x_n - x_0) = 0$$

y

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = 1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 1(x_n - x_0) = 1(1-0) = 1$$

por lo tanto

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{\underline{S}(f,P) : P \ \ es \ \ partición \ \ de \ \ [0,1]\} = \sup\{0\} = 0$$

y

$$\overline{\int_0^1} f = \inf\{\overline{S}(f,P) : P \ \ es \ \ partición \ \ de \ \ [0,1]\} = \inf\{1\} = 1$$

por lo tanto

$$\underline{\int_0^1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f$$

por lo tanto f no es integrable sobre $[0,1]$

Teorema 1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada sobre $[a,b]$ entonces f es integrable sobre $[a,b]$ si y solo si* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ P_e \in\ P_{[a,b]}$ *tal que* $\overline{S}(f,P_\epsilon) - \overline{S}(f,P_\epsilon) < \epsilon$

Demostración. ($\Rightarrow$)Sea $\epsilon > 0$, sea $\epsilon_0 = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$
Como

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f,P) : \ P \ \ es \ \ partici\acute{0}n \ \ de \ \ [a,b]\}$$

entonces $\exists\ \ P_1$ partición de $[a,b]$ tal que

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon_0 < \underline{S}(f,P_1) \leq \underline{\int_a^b} f$$

y como

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}(f,P) : \ P \ \ es \ \ partici\acute{0}n \ \ de \ \ [a,b]\}$$

entonces $\exists\ \ P_2$ partición de $[a,b]$ tal que

$$\overline{\int_a^b} f < \overline{S}(f,P_2) \leq \overline{\int_a^b} f + \epsilon_0$$

Sea $P_\epsilon = P_1 \bigcup P_2$, se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon_0 < \underline{S}(f,P_1) \leq \underline{S}(f,P_\epsilon) \quad y \quad \overline{S}(f,P_\epsilon) < \overline{S}(f,P_2) \leq \overline{\int_a^b} f + \epsilon_0$$

$$\therefore \quad \overline{S}(f,P_\epsilon) - \underline{S}(f,P_\epsilon) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon_0 - \left(\underline{\int_a^b} f - \epsilon_0\right) \underbrace{=}_{\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f} 2\epsilon_0 = 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ P_e \in\ P_{[a,b]}$ *tal que* $\overline{S}(f,P_\epsilon) - \underline{S}(f,P_\epsilon) < \epsilon$
como

$$\underline{S}(f,P_\epsilon) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,P_\epsilon)$$

entonces

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

$$\therefore \quad 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

por tanto f es integrable sobre $[a, b]$ $\square$

Ejemplo.-Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ y sea $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots \frac{n}{n}\}$
se tiene esntonces que

$$\overline{S}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(1+2+3+4+\cdots+n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{(n)(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

y

$$\underline{S}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta_i = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(1+2+3+4+\cdots+n-1)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{(n-1)(n)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

este último valor puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando n suficientemente grande
por lo tanto $f(x) = x$ es integrable sobre $[0, 1]$