Tarea 2 1

Sumas Inferiores y Sumas Superiores

1.-Calcular $\underline{\int_0^1} f$ y $\overline{\int_0^1} f$ para

a)$f(x) = x^4$

b) $f(x) = x^2 - 1$

2.-Demostrar el siguiente resultado:

Sea $I = [a, b]$ y sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces

$$f \;\; es \;\; integrable \;\; en \;\; I \;\; \Leftrightarrow \;\; f \;\; es \;\; integrable \;\; en \;\; I_1 = [a, c] \;\; como \;\; en \;\; I_2 = [c, b]$$

en este caso

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3.-Demostrar que

$$\int_0^b x^p = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

4.-Demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0 \; \forall \; x \in \; [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f \geq 0$$

5.-Demuestre que si f,g son funciones integrables sobre $[a, b]$ entonces $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

6.-De un contraejemplo que muestre que el reciproco del resultado del ejercicio 5 no se cumple

7.-Demuestre lo siguiente:

Si f es integrable sobre $[a, b]$ entonces para cualquier número c, la función cf es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f$$

8.-Demuestre lo siguiente:

Si f es integrable en $[a, b]$ entonces tambén lo es $|f|$ y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

9.-Demostrar que

$$\int_a^b f(x) = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)$$

10.-Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(t) = c \int_a^b f(ct)$$