

Derivación Implícita

El círculo de radio 1 con centro en el origen, puede representarse implícitamente mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ ó explícitamente por las ecuaciones $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Una representación explícita de una curva del plano xy esta dada por un par de ecuaciones que expresan y en términos de x ó x en términos de y y son de la forma $y=g(x)$ ó $x=g(y)$.

Ejemplo

$$y = x \operatorname{sen} x$$

Ejemplo

$$y = 5 - \frac{5}{3}x$$

Ahora bien existen ecuaciones como

$$x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$$

En las que ninguna variable está en forma explícita. Se dice entonces que dicha ecuación define implícitamente una variable en términos de la otra.

Sin embargo existen procedimientos para calcular la derivada de este tipo de funciones, tal procedimiento se conoce como *derivación implícita*

Ejemplo Hallar $\frac{dy}{dx}$ para

$$y^5 + y + x = 0$$

Solución Para esto se deriva respecto a x en ambos lados

$$\frac{d}{dx}(y^5 + y + x) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^5) + \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(x) = 0 \Rightarrow 5y^4 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}(5y^4 + 1) = -1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{5y^4 + 1}$$

Ejemplo Hallar $\frac{dy}{dx}$ para

$$y^2 x^2 + x^3 = 4$$

Solución Para esto se deriva respecto a x en ambos lados

$$\frac{d}{dx}(y^2 x^2 + x^3) = \frac{d}{dx}(4) \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2 x^2) + \frac{d}{dx}(x^3) = 0 \Rightarrow 2xy^2 + 2x^2 y \frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2xy^2}{2x^2 y}$$

Ejemplo Hallar $\frac{dy}{dx}$ para

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Solución Para esto se deriva respecto a x en ambos lados

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^3 + y^3 - 3axy) &= \frac{d}{dx} (0) \Rightarrow \frac{d}{dx} (x^3) + \frac{d}{dx} (y^3) - \frac{d}{dx} (3axy) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3ay - 3ax \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} (3y^2 - 3ax) &= -3x^2 - 3ay \Rightarrow \frac{dy}{dx} \frac{-3x^2 + 3ay}{3y^2 - 3ax} \end{aligned}$$

En general, una representación implícita de una curva del plano xy esta dada por una sola ecuación en x, y de la forma $F(x, y) = 0$. Si derivamos ambos miembros usando regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

Ejemplo Hallar $\frac{dy}{dx}$ para

$$y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$$

Solución En este caso

$$F(x, y) = y^2 \cos x - a^2 \sin 3x$$

por lo que

$$\frac{dF}{dx} = -3a^2 \cos 3x - y^2 \sin x \quad y \quad \frac{dF}{dy} = 2y \cos x$$

por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\frac{-3a^2 \cos 3x - y^2 \sin x}{2y \cos x}$$

El ejemplo anterior muestra como podemos hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$, de la ecuación

$$y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$$

aunque no tengamos una representación explícita de la forma $y = f(x)$.

Si en la ecuación

$$y^5 + y + x = 0$$

hacemos $y = f(x)$ tenemos entonces

$$[f(x)]^5 + [f(x)] + x = 0$$

y podemos plantear la derivación implícita de la siguiente forma.

Demostrar que existe una función diferenciable f tal que

$$[f(x)]^5 + f(x) + x = 0 \quad \forall x$$

Demostración. Sea $g(x) = -x^5 - x$ la cual es una función que es monotonamente creciente pues

$$\text{si } x < y \Rightarrow x^5 < y^5 \Rightarrow x^5 + x < y^5 + x < y^5 + y \Rightarrow -x^5 - x > -y^5 - y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

y por tanto f es monotonamente decreciente y en consecuencia uno-uno, así que admite una inversa a la que llamamos $f = g^{-1} \forall x$, además

$$g'(x) = -5x^4 - 1 < 0 \quad \forall x$$

y por tanto se tiene que

$$x = g(f(x)) = -[f(x)]^5 - f(x) \quad \forall x \Rightarrow [f(x)]^5 + f(x) + x = 0 \quad \forall x$$

y tal función f existe y es derivable. □

En el planteamiento anterior usamos varios conceptos

Monotonía Usemos el siguiente resultado

Si $f'(x) > 0$ entonces f es creciente,

Para comprobar esto tenemos que

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

entonces ocurre

$$\begin{pmatrix} f(x+h) - f(x) > 0 & y & h > 0 \\ f(x+h) - f(x) < 0 & y & h < 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x < x+h & y & f(x) < f(x+h) \\ x+h < x & y & f(x+h) < f(x) \end{pmatrix}$$

en cualquier caso se tiene que f es una función creciente, por lo tanto si $f'(x) > 0$ entonces f es creciente.

El caso $f'(x) < 0$ es análogo, concluimos entonces que f es monotonamente decreciente si $f'(x) < 0$

Función inversa Usemos el resultado

Si f es monotonamente creciente entonces existe f^{-1}

Derivada de la función inversa Al definir $f = g^{-1}$ tenemos que

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(f(x))}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que existe una función diferenciable $f = g^{-1}$ tal que

$$[f(x)]^5 + f(x) + x = 0 \quad \forall x$$

Ejercicio Use lo anterior para demostrar que existe una función diferenciable $f(x)$ tal que

$$[f(x)]^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

Solución (1) Definimos una función $g(x)$ en este caso

$$g(x) = \left(a^{\frac{1}{2}} - [x]^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

(2) Derivamos $g(x)$, en este caso

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

se tiene que

$$g'(x) \neq 0 \text{ si } x \neq a$$

en estos valores $g'(x) \neq 0$ y por tanto g es monótona, en consecuencia existe la función inversa g^{-1}

(3) Definimos $f = g^{-1}$ y tenemos que

$$g(x) = \left(a^{\frac{1}{2}} - [x]^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow g(f(x)) = \left(a^{\frac{1}{2}} - [f(x)]^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x = \left(a^{\frac{1}{2}} - [f(x)]^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} - [f(x)]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow [f(x)]^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

de esta manera hemos demostrado la existencia de una función $f(x)$ que cumple la ecuación.

(4) Vamos a derivar, en este caso

$$f'(x) = (g^{-1})' = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(a^{\frac{1}{2}} - (f(x))^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}(f(x))^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

concluimos entonces que f es diferenciable.