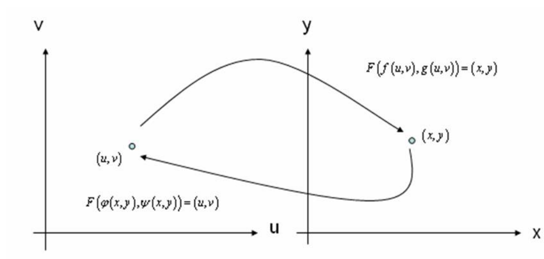
Teorema de la Función Inversa

Para el caso de una funcion $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se tiene



Nuestro problema es, dadas las funciones $x = f(u, v)$ y $y = g(u, v)$ que describen a x, y como funciones de u, v, cuando es posible establecer "funciones inversas"que describen a u y v como funciones de x, y. Es decir queremos tener

$$(F^{-1} \circ F)(u, v) = F^{-1}(F(u, v)) = F^{-1}(x, y) = F^{-1}(f(u, v), g(u, v)) = (u, v)$$

$$(F \circ F^{-1})(x, y) = F(F^{-1}(x, y)) = F(u, v) = F(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = (x, y)$$

Un caso particular del Teorema general de la función implícita es el Teorema de la función inversa. Dado un sistema de n-ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = y_n \end{array}\right\} \text{Tratamos de resolver las n-ecuaciones para } x_1, x_2, ...x_n \text{como funciones de } y_1, y_2, ...y_n.$$

Esto es, estamos tratando de invertir las ecuaciones del sistema anterior, que es algo análogo a formar los inversos de funciones como $senx = y$ y $e^x = y$, sólo que esta vez se intentará con funciones de varias variables. La cuestión de existencia se responde por medio del teorema general de la función implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ con las incognitas $x_1, x_2, ..., x_n$. La condición de existencia para la solución en una vecindad del punto x_0 es que el determinante de la matriz $Df(x_0)$ y $f = (f_i, f_2, ...f_n)$ sean distintos de cero. Explicitamente:

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}\right|_{x=x_0} = J(f)(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Mas aún, si consideramos las expresiones:

$$\begin{array}{c} G(x, y, u, v) = x - f(u, v) = 0 \\ H(x, y, u, v) = y - g(u, v) = 0 \end{array}$$

Lo que pretendemos es "despejar"de ella a u y v en términos de x e y y poder establecer así las funciones $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$. Entonces el T.F.Im. (tercera versión) nos da las condiciones para que podamos hacer esto. Sea $P = (x,y,u,v)\epsilon\mathbb{R}^4$ un punto tal que $G(p) = H(p) = 0$. Supongamos que en una bola de centro en P las derivadas parciales de G y H son continuas. Si el jacobiano $\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)} \neq 0$ en P, entonces es posible "despejar"de ellas a u y v en terminos de x e y, y establecer así funciones $u = \varphi(x,y), v = \varphi(x,y)$ definidas en una vecindad V de $(x,y) = F(u,v)$, las cuales tienen derivadas parciales continuas en V que se pueden calcular como

$$\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial G}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial g}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial((x,v)}}{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} & \dfrac{\partial H}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Por lo tanto: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial((y,v)}}{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} & \dfrac{\partial H}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ 1 & -\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Por lo tanto: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial((u,x)}}{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial u} & 1 \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial((u,y)}}{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix}\dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\\ \dfrac{\partial H}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial y}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix}-\dfrac{\partial f}{\partial u} & 0\\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & 1\end{vmatrix}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

En resumen tenemos: Sean $f,g:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funciones definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Sean $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$. Suponga que alguna bola B de $\mathbb{R}^2$ con centro (u,v), las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v}$ son continuas. Si el jacobiano $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ es no nulo en (u,v) entonces $\exists$ una vecindad V de $\bar{x},\bar{y}$ donde podemos definir "funciones inversas" $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ es decir tales que $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$, y $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))=x,g(\varphi(x,y),\psi(x,y))=y$ para $(x,y)\epsilon V$ las cuales tienen derivadas parciales continuas en V que se calculan como

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\qquad(*)$$

Dada la función inversa $F^{-1}(x,y)$. Esta tiene por funciones coordenadas a las funciones $u=\varphi(x,y)$. Es decir $F^{-1}(x,y)=(u,v)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$. La matrix jacobiana de esta función es:

$$JF^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$$

El resultado anterior $(*)$ nos dice como calcular las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ en una vecindad V de (x,y) al sustituir las fórmulas correspondientes en JF^{-1}, recordando que $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}=det(JF)$.

$$JF^{-1}=\begin{vmatrix}\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{det(JF)} & -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial u}}{det(JF)}\\ -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{det(JF)} & \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial U}}{det(JF)}\end{vmatrix}=\frac{1}{det(JF)}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial v} & -\dfrac{\partial f}{\partial v}\\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u}\end{vmatrix}$$

Multipliquemos JF y JF^{-1}, se obtiene

$$(JF)(JF^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{1}{det(JF)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial v} & -\frac{\partial f}{\partial v} \\ -\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} = \frac{1}{det(JF)} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial v} & -\frac{\partial f}{\partial v} \\ -\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{det(JF)} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}}{det(JF)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así concluimos que la matriz jacobiana de la función inversa de F es justamente la inversa de la matriz jacobiana de F. Es decir se tiene

$$JF^{-1} = (JF)^{-1}$$

Teorema de la Función Inversa

Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el conjunto abierto $U \in \mathbb{R}^n$. Sea $F(p) = q$ donde $p = (x_1, ..., x_n)$ y $q = (y_1, ..., y_n)$. Suponga que en una bola $B \in \mathbb{R}^n$ con centro p, F es clase C^1 y $detJF(p) \neq 0$. Entonces hay una bola $B' \in \mathbb{R}^n$ con centro q en la que se puede definir la función inversa de F, F^{-1} la cual es de clase C^1 y $JF^{-1}(y) = [JF(x)]^{-1}$ donde $y = F(x) \in B'$

Ejemplo: Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(u, v) = (u^2 + v^3, u^2 + uv)$. Se tiene $f(1, 2) = (9, 3)$. Esta función es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de sus funciones coordenadas $x = f(u, v) = u^3 + v^3$, $y = g(u, v) = u^2 + uv$ son

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 3u^2 \ , \ \frac{\partial f}{\partial v} = 3v^2 \ , \ \frac{\partial g}{\partial u} = 2u + v \ , \ \frac{\partial g}{\partial v} = u$$

La matriz jacobiana de f es

$$JF = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 & 3v^2 \\ 2u + v & u \end{vmatrix}$$

la cual en el punto $(1, 2)$ es invertible pues

$$detJF(1, 2) = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$$

Así podemos concluir que en una bola B' de $(9, 3)$ se da la inversa F^{-1} de F o bien, que podemos despejar de $x = u^3 + v^3, y = u^2 + uv$ a u, v como funciones de x e y, la cual es de clase C^1 en B' y que su derivada es

$$JF^{-1}(x, y) = [JF(u, v)]^{-1} = \frac{1}{detJF} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial v} & -\frac{\partial f}{\partial v} \\ -\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} = \frac{1}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3} \begin{vmatrix} u & -3v^2 \\ -(2u + v) & 3u^2 \end{vmatrix}$$

donde $x = u^3 + v^3, y = u^2 + uv$. Es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(u^3 + v^3, u^2 + uv) = \frac{u}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(u^3 + v^3, u^2 + uv) = \frac{-3v^2}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(u^3 + v^3, u^2 + uv) = \frac{-2u + v}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(u^3 + v^3, u^2 + uv) = \frac{3u^2}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}$$

Ejemplo: Considere las ecuaciones

$$x = u + v + e^w$$
$$y = u + w + e^{2v}$$
$$x = v + w + e^{3u}$$

para $p = (u, v, w) = (0, 0, 0)$ se tiene que $q = (x, y, z) = (1, 1, 1)$ el determinante de la matriz jacobiana de la función $F(u, v, w))(x, y, z)$ es:

$$detJF = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^w \\ 1 & 2e^{2v} & 1 \\ 3e^{3u} & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si calculamos su determinante obtenemos

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (2-1) - 1 \times (1-3) + 1 \times (1-6) = 1 + 2 - 5 = -2 \neq 0$$

$\therefore$ Podemos localmente invertir la función F, entorno al punto q, donde podemos definir funciones de clase c^1 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$. Ahora bien como

$$JF^{-1}(q) = [JF(p)]^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \underbrace{=}_{*} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

* Vamos a calcular la inversa usando la matriz de cofactores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponiendo la ultima matriz tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ las parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p) = -\frac{1}{2} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(p) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z}(p) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(p) = -1 \quad \frac{\partial v}{\partial y}(p) = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial z}(p) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(p) = \frac{5}{2} \quad \frac{\partial w}{\partial y}(p) = -1 \quad \frac{\partial w}{\partial z}(p) = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo: Dada la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(u, v) = (e^{u+v}, e^{u-v})$ es diferenciable siempre y su derivada es

$$JF(u, v) = \begin{vmatrix} e^{u+v} & e^{u+v} \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \end{vmatrix}$$

Como $det(JF(u, v)) = -2e^{2u} \neq 0$ concluimos que es posible despejar a u y v en términos de x, y. Más aún, como

$$(JF(u, v))^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{e^{u-v}}{2e^{2u}} & \dfrac{e^{u+v}}{2e^{2u}} \\ \dfrac{e^{u-v}}{2e^{2u}} & -\dfrac{e^{u+v}}{2e^{2u}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}e^{-u-v} & \frac{1}{2}e^{-u+v} \\ \frac{1}{2}e^{-u-v} & -\frac{1}{2}e^{-u+v} \end{vmatrix}$$

Concluimos que las derivadas parciales de las funciones inversas $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ son en el punto (e^{u+v}, e^{u-v})

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{-u-v} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}e^{-u+v} \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{-u-v} \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}e^{-u+v}$$

En este caso es posible hacer explícitas $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$. En efecto de las expresiones $x = e^{u+v}, y =$

e^{u-v}, se deduce $u = \frac{1}{2}lnx + lny, v = \frac{1}{2}(lnx - lny)$ cuyas derivadas coinciden con las obtenidas de la matriz jacobiana.

Ejemplo: Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) = 1$. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = \left(\int_x^y g(t)dt, \int_y^{x^2} g(t)dt\right)$. Demuestre que esta función tiene una inversa F^{-1} definida en una bola B del origen de coordenadas. Determine JF^{-1}

Tenemos que:

$$f_1(x, y) = \int_x^y g(t)dt = \int_x^a g(t)dt + \int_a^y g(t)dt = -\int_a^x g(t)dt + \int_a^y g(t)dt$$

$\therefore$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -g(x) \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = g(y)$$

Análogamente

$$f_2(x, y) = \int_y^{x^2} g(t)dt = \int_y^a g(t)dt + \int_a^{x^2} g(t)dt = -\int_a^y g(t)dt + \int_a^{x^2} g(t)dt$$

$\therefore$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2xg(x^2) \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -g(y)$$

Por lo tanto

$$JF = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -g(x) & g(y) \\ g(x^2)2x & -g(y) \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} -g(0) & g(0) \\ g(0^2)2*0 & -g(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Por lo tanto en los alrededores del (0,0) podemos definir "funciones inversas". Ahora para calcular JF^{-1} tenemos que

$$JF^{-1} = (JF)^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \underbrace{=}_{*} \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

* Recordando que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Ejercicio: Vamos a calcular la matriz jacobiana de la funcion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (x^2y, z, xyz)$

Tenemos que:

$$MJF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

A la traza de la matriz Jacobiana se le conoce también como Divergencia se le denota $divF$ o $\nabla \cdot F = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (f_1, f_2, f_3)$

$$divF = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

En nuestro caso

$$divF = \nabla \cdot F = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (x^2y, z, xyz) = \frac{\partial x^2y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial xyz}{\partial z} = 2xy + 0 + xy = 3xy$$

A la diferencia de los elementos que estan fuera de la diagonal principal

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z},\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x},\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

se le conoce como rotacional y se le denota $rotF$, también se puede calcular

$$rotF=\begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

En nuestro caso

$$rotF=\left(xz-1,-yz,-x^2\right)$$

A la divergencia de un gradiente $\nabla(\nabla F)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\nabla^2 f$ se le conoce como el operador laplaciano y desempeña un papel importante en la física

Ejemplo: Mostrar que $\nabla^2 f=0$ para $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ donde $(x,y,z)\neq 0$

Tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\therefore$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\therefore$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$\frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$