Ejemplo de limite de función vectorial

Si $f(t) = (3t, t^2)$ determinese $\lim_{t\to t_2} f(t)$.

Sol. Para t próximo a a 2 vemos que $f(t) = (3t, t^2)$ esta próximo a (6,4). Asi pues suponemos que $\lim_{t\to t_2} f(t) = (6, 4)$. sea $\epsilon > 0$ buscamos un

$$\delta > 0 \quad tal \quad que \quad \|(3t, t^2) - (6, 4)\| < \epsilon \quad siempre \quad que \quad 0 < |t - t_0| < \delta$$

tenemos que

$$\|(3t, t^2) - (6, 4)\| = \|(3t - 6, t^2 - 4)\| = \sqrt{(3t-6)^2 + (t^2-4)} \underbrace{<}_{*} \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

(*)

$$(3t-6)^2 < \frac{\epsilon^2}{2} \Leftrightarrow |3t-6| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3|t-2| < \frac{\epsilon}{3\sqrt{2}}$$

Por lo tanto sea $\delta_1 = \frac{\epsilon}{3\sqrt{2}}$

$$|t^2-4|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} \Leftrightarrow |t^2-4| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |t+2||t-2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

necesitamos acotar $|t+2|$ y para ello usaremos $\delta_3 = 1$ por lo que tenemos

$$0 < |t-1| < \delta \Rightarrow 0 < |t-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < t-1 < 1 \Leftrightarrow 4 < t+2 < 5 \Leftrightarrow 4 < |t+2| < 5$$

de donde

$$|t-2| < \frac{\epsilon}{5\sqrt{2}} \Rightarrow 5|t-2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \Rightarrow |t+2||t-2| < \frac{\epsilon}{5\sqrt{2}}$$

Por lo tanto sea $\delta_2 = min\{1, \frac{\epsilon}{5\sqrt{2}}\}$

Si tomamos ahora $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que:

$$\|(3t, t^2) - (6, 4)\| = \|(3t - 6, t^2 - 4)\| = \sqrt{(3t-6)^2 + (t^2-4)} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

siempre que

$$0 < |t-2| < \delta$$

Límites de funciones vectoriales

Sea $f(t)$ una función vectorial definida para todos los valores de t en alguna vecindad de un punto t_0, excepto quiza en t_0. Entonces â es el vector limite de $f(t)$ cuando t se acerca a t_0 y se expresa como

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a$$

si y solo si $\forall\ \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\|f(t) - a\| < \epsilon$ siempre que $|t - t_0| < \delta$

Problema.- Si $f(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ y $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ entonces demostrar que

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to t_0} f_i(t) = a_i$$

Demostración:

Si
$$\lim_{t \to t_0} f(t) = a$$
entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $\|f(t) - a\| < \epsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$. Asi que
$$f(t) - a = (f_1(t) - a_1)i + (f_2(t) - a_2)j + (f_3(t) - a_3)k$$
y para todo $0 < |t - t_0| < \delta$
$$|f_i(t) - a_i| < |f(t) - a| < \epsilon$$
entonces $|f_i(t) - a_i| < \epsilon$ por lo tanto
$$\lim_{t \to t_0} f_i(t) = a_i$$

Reciprocamente, si
$$\lim_{t \to t_0} f_i(t) = a_i$$
entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que
$$|f_i(t) - a_i| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{siempre que } 0 < |t - t_0| < \delta$$
Usando la desigualdad del triángulo
$$|f(t) - a| = |f_1(t) - a_1, f_2(t) - a_2, f_3(t) - a_3|$$
$$\leq |f_1(t) - a_1| + |f_2(t) - a_2| + |f_3(t) - a_3| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$
Por lo tanto
$$\lim_{t \to t_0} f(t) = a$$

En resumen, si $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, entonces
$$\lim_{t \to t_0} r(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} h(t) \right)$$
en caso que existan los límites de las funciones componentes.

Ejemplos: Encuentre
$$\lim_{t \to 0} r(t)$$

1.- Si $r(t) = (1 + t^3)i + te{-}tj + \frac{\sin t}{t}k$
$$\lim_{t \to 0} r(t) = \left(\lim_{t \to 0} 1 + t^3, \lim_{t \to 0} te^{-t}, \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \right) = (1, 0, 1)$$

2.- Si $f(t) = (\frac{\sin t}{t}, t^2 + t + 3)$ entonces

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}, \lim_{t\to 0} t^2 + t + 3\right) = (1, 3)$$

Teorema. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, entonces

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L = (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to t_0} x_i(t) = l_i$$

Donde $f(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$

Demostración:

Si

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L$$

entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|f(t) - L\| < \epsilon$. Pero como

$$\|f(t) - L\| = \|x_1(t) - l_1, \cdots, x_n(t) - l_n\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

se tiene que

$$|x_i(t) - l_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \epsilon$ por lo tanto

$$\lim_{t\to t_0} x_i(t) = l_i$$

Reciprocamente

Supongamos ahora que

$$\lim_{t\to t_0} x_i(t) = l_i \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Esto quiere decir que $\forall\ \epsilon_i > 0\ \exists\ \delta_i > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta_i \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \epsilon_i$.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ tomamos $\delta = \mathbf{min}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$.

Para esta δ se tiene $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\ \forall\ i = 1, \cdots, n$, entonces

$$\|f(t) - L\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L$$

Las operaciones usuales del algebra vectorial pueden aplicarse para combinar 2 funciones o una función vectorial con una función real.

Si f y g son funciones vectoriales y u es una función real

a) $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

b) $uf(t) = u(t)f(t)$

c) $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$

d) $(f * g)(t) = f(t) * g(t)$

e) Si $g = f \circ u$ entonces $g(t) = f(u(t))$

Teorema.- Propiedades sobre límite.

Sean $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $a = (a_1, \cdots, a_n)$ $b = (b_1, \cdots, b_n)$

a) Si

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = a \quad \text{y} \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = b$$

entonces

$$\lim_{t \to t_0} f(t) + g(t) = a + b$$

Demostración:

Si

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = a \quad \text{y} \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = b$$

entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - a| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|g(t) - b| < \frac{\epsilon}{2}$, por lo tanto

$$|f(t) + g(t) - (a + b)| = |f(t) - a + g(t) - b| \leq |f(t) - a| + |g(t) - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) + g(t) = a + b$$

b)

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \cdot g(t) = a \cdot b$$

Tenemos que $f(t) \cdot g(t) = f_1(t) \cdot g_1(t) + \cdots + f_n(t) \cdot g_n(t)$ y como

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to t_0} g(t) = b$$

entonces

$$\lim_{t \to t_0} f_i(t) = a_i \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to t_0} g_i(t) = b_i$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} f(t) \cdot g(t) &= \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_1(t) + \cdots + f_n(t) \cdot g_n(t) \\ &= \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_1(t) + \cdots + \lim_{t \to t_0} f_n(t) \cdot g_n(t) \\ &= a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \cdot g(t) = a \cdot b$$

c) Para $n = 3$

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \text{x} g(t) = a \text{x} b$$

Tenemos que

$$f(t) \text{x} g(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

$$= [f_2(t) \cdot g_3(t) - g_2(t) \cdot f_3(t), f_1(t) \cdot g_3(t) - g_1(t) \cdot f_3(t), f_1(t) \cdot g_2(t) - g_1(t) \cdot f_2(t)]$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \text{x} g(t)$$

$$= \lim_{t \to t_0} f_2(t) \cdot g_3(t) - g_2(t) \cdot f_3(t), \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_3(t) - g_1(t) \cdot f_3(t), \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_2(t) - g_1(t) \cdot f_2(t)$$

$$= \lim_{t \to t_0} f_2(t) \cdot g_3(t) - \lim_{t \to t_0} g_2(t) \cdot f_3(t), \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_3(t) - \lim_{t \to t_0} g_1(t) \cdot f_3(t), \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_2(t) - \lim_{t \to t_0} g_1(t) \cdot f_2(t)$$

$$= a_2 b_3 - b_2 a_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - b_1 a_2 = a \text{x} b$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \text{x} g(t) = a \text{x} b$$

d)

$$\lim_{t\to t_0} |f(t) = |a||$$

tenemos que $||f(t)| - |a|| \leq |f(t) - a| \overset{*}{<} \epsilon$

$(*)$Como $\lim_{t\to t_0} f(t) = a$ entonces $|f(t) - a| < \epsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$

Por lo tanto $||f(t)| - |a|| < \epsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$, por lo tanto

$$\lim_{t\to t_0} |f(t)| = |a|$$

Ejercicio: Se sabe que

$$\lim_{t\to 2}(t, t^3) = (2, 8)$$

Puesto que $\epsilon > 0$, determine $\delta > 0$ que verifique la validez del límite.

Tenemos que

$$\lim_{t\to 2}(t, t^3) = \left(\lim_{t\to 2} t, \lim_{t\to 2} t^3\right) = (2, 8)$$

Por lo tanto $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_1, \delta_2$ tal que si $0 < |t-2| < \delta_1 \Rightarrow |t-2| < \epsilon$ y además si $0 < |t-2| < \delta_2 \Rightarrow |t^3 - 8| < \epsilon$, entonces tomamos $\delta = \mathbf{min}(\delta_1, \delta_2)$.

Por lo tanto si $0 < |t-2| < \delta \Rightarrow |t-2| < \epsilon$ y $|t^3 - 8| < \epsilon$

Por lo tanto

$$\lim_{t\to 2}(t, t^3) = (2, 8)$$

Para precisar:

Si

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{t\to t_0} |f(t)| = \lim_{t\to t_0} \left[f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{*}{=} \left[\lim_{t\to t_0} f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)\right]^{\frac{1}{2}}$$

(*) Por la continuidad de la función $\sqrt{\ }$

$$= \left[\left(\lim_{t\to t_0} f_1(t)\right)^2 + \left(\lim_{t\to t_0} f_2(t)\right)^2 + \left(\lim_{t\to t_0} f_3(t)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|L\|$$