INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS QUE FUNDAMENTAN EL CÁLCULO

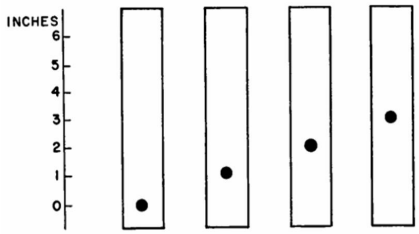
El cálculo fue creado sobre todo para tratar los principales problemas científicos del siglo XVII. Había cuatro tipos de problemas.

El primero era el siguiente:

Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cualquier instante; y, al revés, dada la fórmula que describe la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. Este problema surgió directamente en el estudio del movimiento, y la dificultad que planteaba era que las velocidades y las aceleraciones que interesaban en el siglo XVII variaban de instante en instante. Al calcular una velocidad instantanea, por ejemplo, no se puede dividir la distancia recorrida por el tiempo empleado, como ocurre en el caso del cálculo de la velocidad media, porque en un instante dado tanto la distancia recorrida como el el tiempo empleado son cero, y $\frac{0}{0}$ no tiene sentido. Sin embargo, era claro desde un punto de vista físico que los objetos móviles tienen una velocidad en cada instante de su viaje. El problema inverso de obtener la distancia recorrida, conociendo la fórmula de la velocidad, incluye la dificultad correspondiente; no se puede multiplicar la velocidad en cualquier instante de tiempo utilizado para obtener el espacio recorrido, porque la velocidad varía de un instante a otro.

Vamos a investigar un poco como obtener la velocidad de un objeto en movimiento.

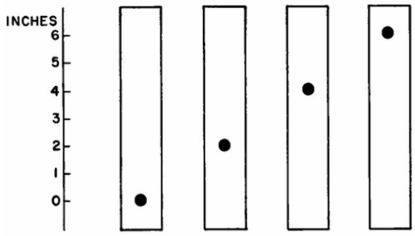
Supongamos que tenemos una cámara que toma una imagen cada decima de segundo. Supongamos imagenes sucesivas



¿Que esta haciendo el pequeño objeto? Cada décima de segundo se mueve un centímetro. Parece

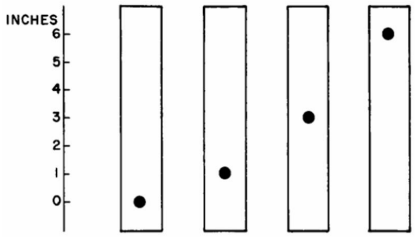
que se esta moviendo a una velocidad constante de 10 centímetros por segundo.

Ahora supóngase que el objeto se mueve 2 centímetros entre una imagen y la siguiente



Aquí parece tener una velocidad constante de 20 centímetros por segundo.

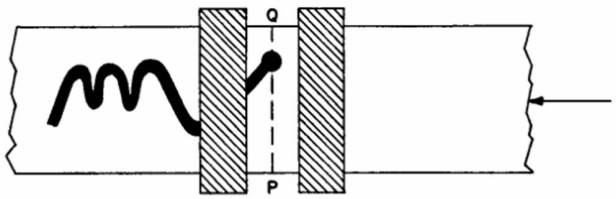
Ahora observemos algo con velocidad variable. Supongamos que un objeto está acelerando. Entre la primera imagen y la segunda podría cubrir un centímetro; entre la segunda y la tercera podría cubrir 2 centímetros; entre la tercera y la cuarta imagen, 3 centímetros



ahora notamos ciertas cosas.

(1) Con velocidad constante los puntos caen sobre una línea recta, (2) con movimiento acelerado, los puntos caen sobre una curva.

En la siguiente figura el objeto se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la línea PQ. Un papel se va recorriendo de derecha a izquierda a una velocidad constante; el objeto esta entintado de modo que deja su huella sobre el papel.



Un movimiento hacia arriba con rapidez se vería:

Un movimiento hacia abajo lento se vería:

Un movimiento estacionario se vería:

Hacia una velocidad variable. ¿Como encontraríamos la velocidad de un objeto con velocidad variable?.

Se da la siguiente tabla

$Tiempo$	2	5
$distancia$	70	220

Para esta tabla tenemos que podemos aproximar una velocidad promedio

$$V = \frac{220}{70} = \frac{150}{3} = 50$$

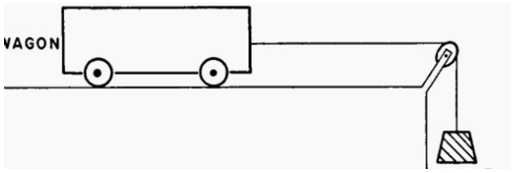
por lo que tendriamos una velocidad promedio de 50. Vamos ahora a tratar de generalizar, se tiene la tabla

$Tiempo$	a	b
$distancia$	p	q

$\therefore$ nuestra velocidad promedio es

$$V = \frac{q-p}{b-a} =$$

Encaminandonos ahora hacia velocidad variable.



El vagón pesa 15 gramos, la pesa tendría que tener un peso mayor de para lograr mover el vagón, se tiene la siguiente tabla

Tiempo	0	1	2	3	4
distancia	0	1	4	9	16

La tabla concuerda con la ley $t^2 = s$ hay un movimiento acelerado, supongamos que intentamos calcular la velocidad en el instante $t = 3$. En el segundo anterior $t = 2$ se cubre una distancia de $s = 4$ en $t = 3$ se cubre $s = 9$ por lo que tendríamos una velocidad promedio de $V = \frac{9-4}{3-2} = 5$. Un segundo posterior $t = 4$ se cubre $s = 16$ por lo que tendríamos una velocidad promedio de $V = \frac{16-9}{4-3} = 7$ por lo que es razonable pensar que en $t = 3$ se tiene una velocidad aproximada entre 5 y 7 $\frac{cm}{s}$.

Analicemos ahora $\frac{1}{2}$ segundo antes y $\frac{1}{2}$ segundo despues, obteniendo la tabla

Tiempo	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$
distancia	$6\frac{1}{4}$	9	$12\frac{1}{4}$

Tendríamos una velocidad de 5,5 y 6,5 respectivamente.

Continuando este proceso se llega a la tabla

Tiempo	1			,1			,01			,001		
distancia	5	*y*	7	5,9	*y*	6,1	5,99	*y*	6,01	5,999	*y*	6,001

Usando simbolos algebraicos para los intervalos 3 y $3 + ,1$, 3 y 31,1,3 y $3 + ,01$, 3 y $3 - ,01$ que son casos particulares de 3 y $3 + h$ para encontrar la velocidad en $t = 3$ tomamos el intervalo

3 y $3+h$ tenemos entonces la tabla

Tiempo	3	$3+h$
distancia	9	$9+6h+h^2$

Que tan lejos ha ido el objeto $9+6h+h^2-9=6h+h^2$

Que tan largo es el intervalo de tiempo $3+h-3=h$

Nuestra aproximación es

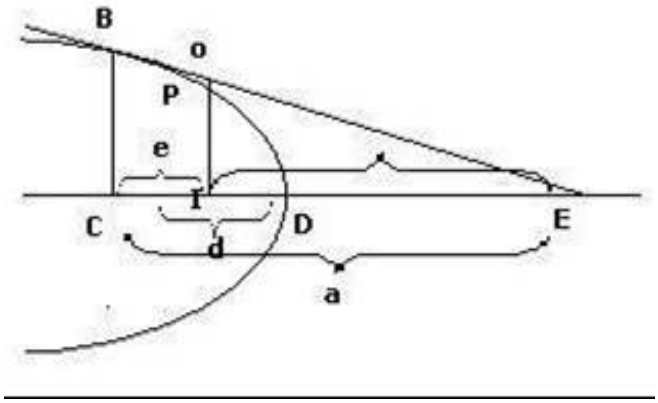
$$\frac{6h+h^2}{h}=\frac{h(6+h)}{h}=6+h$$

entre más corto sea h nuestra velocidad será 6

El segundo tipo de problemas era obtener la tangente a una curva. El interés poe este problema vino de más de una fuente; era un problema de geometría pura, y era de gran importancia para las aplicaciones científicas. La óptica como sabemos era uno de los principales objetivos científicos del siglo XVII; el diseño de las lentes era de interés directo para Fermat, Descartes, Huygens y Newton. Para estudial el paso de la luz a través de una lente, se debe conocer el ángulo bajo el cual el rayo toca a la lente, para aplicar la ley de refracción, El ángulo significativo es el que forman el rayo y la normal a la curva o la tangente.

Otro problema científico que implicaba la tangente a una curva surgía en el estudio del movimiento. La dirección del movimiento de un cuerpo móvil en cualquie punto de su trayectoria es la dirección de la tangente de la trayectoria. En realidad, incluso el mismo significado de tangente estaba abierto. Para las secciones cónicas, la definición de una tangente como una recta que toca a una curva en sólo un punto y que permanece a un lado de la curva, bastaba; esta definición era utilizada por los griegos. Pero era inadecuada para las curvas más complicadas que se utilizaban en el siglo XVII.

Vamos a ver un ejemplo de un metodo para encontrar las tangentes a una parábola, es el metodo utilizado por Fermat



Según Apolonio

$\frac{BC^2}{OI^2} < \frac{BC^2}{PI^2} = \frac{CD}{DI}$ Como $OI > PI \Rightarrow OI^2 > PI^2 \Rightarrow \frac{1}{PI^2} > \frac{1}{OI^2}\ \frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$
por semejanza de triangulos $\triangle BCE$ y $\triangle OIE$

$$\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{IE}$$

Si $CD = d$, $CI = e$

$$\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$$

Vamos a determinar el segmento subtangente $CE = a$

$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$ de donde $d(a-e)^2 > a^2(d-e)$

$d(a^2 - 2ae + e^2) > a^2d - a^2e \Rightarrow da^2 - 2ade + de^2 > a^2d - a^2e$

Igualando $da^2 - 2ae + de^2 \cong a^2d - a^2e$

$de^2 + a^2e \cong +2ade$

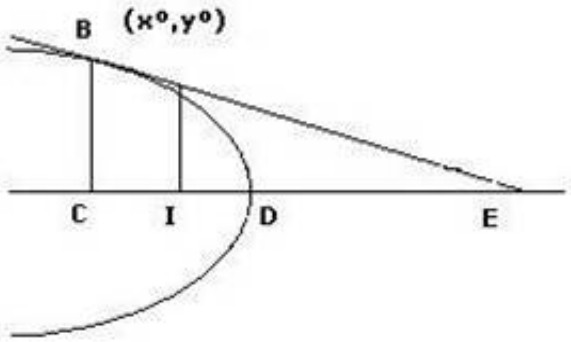
$de + a^2 \cong +2ad$

$a^2 \cong 2ad$

$a \cong 2d$

se a probado que CE es el doble a CD

Aplicamos el resultado de Fermat a la parabola $y^2 = 2px$



tenemos:

sea m la pendiente de la recta tangente en el punto B de cooredenadas $B = (x_0, y_0)$

$m = \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{y_0}{2x_0}$

de donde $y - y_0 = \dfrac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$

al operar $yy_0 = p(x+x_0)$ ecuacion habitual de la tangente a la parabola $(y-y_0)(2x_0) = y_0(x-x_0)$

$2yx_0 - 2x_0y_0 = y_0x - y_0x_0$

$2yx_0 - x_0y_0 = y_0x \Rightarrow 2yx_0 = x_0y_0 + y_0x$

$2yx_0 = y_0(x + x_0)$

$yx_0 = \dfrac{y_0}{2}(x + x_0)$

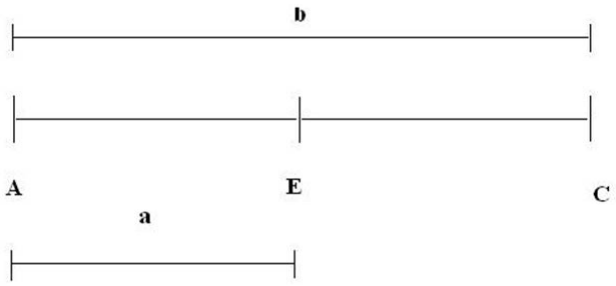
El tercer problema era obtener el valor máximo o mínimo de una función cuando una bala se dispara desde un cañon, la distancia que recorrera horizontalmente -el recorrido- depende del ángulo de inclinación del cañon con respecto al suelo. Un problema práctico era obtener

el ángulo que haría máximo el recorrido. A principios del siglos XVII Galileo obtuvo qie (en el vacio) el recorrido máximo se obtenía para un ángulo de fuego de 45°; también encontró la máxima altura alcanzada por proyectiles disparados con distintos ángulos respecto al suelo. El estudio del movimiento de los planetas también presentaba problemas de máximos y mínimos, tales como los de obtener la mayor y la menor distancia de un planeta al Sol.

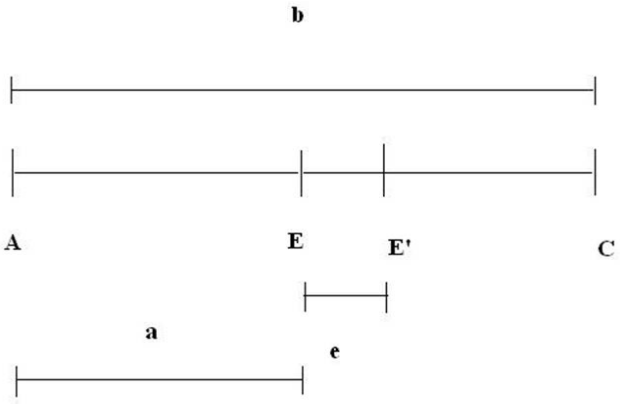
Veamos un ejemplo.- Se da un segmento de recta

Se trata de dividir AC en E tal que $AE \times EC$ sea máximo

llamamos $AC = b$, $AE = a$, $EC = b - a \therefore AE \times EC = a(b-a) = ab - a^2$. . . (1)



Ahora al mismo segmento lo vamos a dividir con un segmento auxiliar AE'



$AE' = a + e,\ E'C = b - (a + e) = b - a - e$

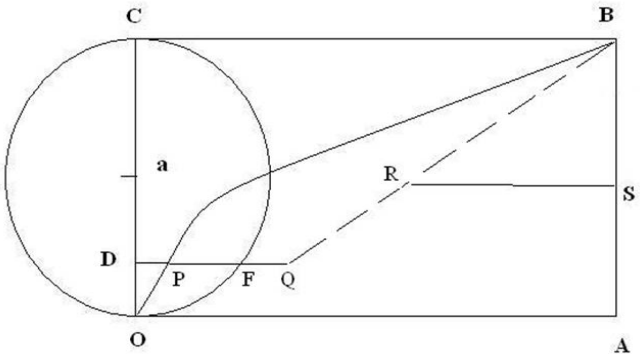
$\therefore AE' \times E'C = (a + e)(b - a - e) = ab - a^2 - ae + be - ea - e^2 \ldots (2)$

$ab - a^2 \cong ab - a^2 - ae + be - ea - e^2 \Rightarrow 2ae + e^2 \cong b \Rightarrow 2a + e \cong b \Rightarrow 2a = b \Rightarrow a = \frac{b}{2}$

El cuarto problema era el de obtener longitudes de curvas como, por ejemplo, la distancia recorrida por un planeta en un periodo de tiempo dado; las áreas acotadas por curvas; los volumenes acotados por superficies; los centros de gravedad de los cuerpos y la atracción gravitatoria que un cuerpo extenso, un planeta, por ejemplo, ejerce sobre otro cuerpo. los griegos habían aplicado el metodo exhaustivo para obtener algunas áreas y volúmenes. A pesar del hecho de que lo aplicaban para áreas y volúmenes relativamente sencillos, tenían que utilizar mucha ingeniosidad, porque al método le faltaba generalidad, y no obtuvieron respuestas numéricas muy a menudo. El interés por obtener longitudes, áreas, volúmenes y centros de gravedad revivió cuando los trabajs de Arquimedes se hicieron conocidos en Europa. El método exhaustivo se modificó primero gradualmente, y despues radicalmente por la invención del cálculo.

Problema de áreas

Se trata de encontrar el área bajo la cicloide



$PQ = DF$ Q dibuja una curva asociada a la cicloide, la curva OQB divide a $OABC$ en 2 partes iguales, a cada línea DQ le corresponde RS $DQ = RS$

$OA = 2\pi r = 2\pi a$

$OA \cdot OC = 2\pi aa = 2\pi a^2$

$\therefore$ El área del rectángulo es el doble del área del círculo

$\therefore OABQ$ Tiene área $\pi a^2 (= circunferencia)$

Además el área OPB y OQB es el área del semicírculo OFC

$\frac{\pi a^2}{2}$

$\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{2}{2}a^2\pi + \frac{3}{2}a^2\pi$