Conjuntos finitos e infinitos

Definición 1. *Decimos que dos conjuntos A, B son* ***equipotentes*** *si existe una función $f : A \to B$ que sea biyectiva, y se denotará $A \sim B$*

Proposición 1. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

a) $A \sim A$

b) Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$

c) Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$

Demostración. En este caso tenemos

a) La función $I_A : A \to A$ es biyectiva, por tanto $A \sim A$

b) Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces existe su inversa $f^{-1} : B \to A$ que es biyectiva.

c) Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es biyectiva.

□

Los números naturales aparecen en principio como una herramienta para contar los elementos de algunos conjuntos, los finitos. Dichos conjuntos tienen asociado un número que es su cardinal.
Decimos que dos conjuntos A y B tienen el mismo cardinal si y sólo si $A \sim B$ (son equipotentes)

Definición 2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el segmento inicial con n elementos como el conjunto I_n tal que:*

$$I_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\} = \{1, 2, 3, ..., n\}$$

Por ejemplo

a) $I_1 = \{1\}$

b) $I_2 = \{1, 2\}$

c) $I_3 = \{1, 2, 3\}$

d) $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

Cada uno de esto conjuntos I_n $(n \geq 1)$ tiene mínimo y máximo, que son 1 y n respectivamente

Definición 3. *Decimos que un conjunto A es finito si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ y existe $f : I_n \to A$ tal que f es biyectiva.*

Un conjunto infinito es uno que no es finito.

Proposición 2. *Si A es un conjunto finito, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que hay una biyección entre I_n y A*

Demostración. Sea A un conjunto finito. Por definición de finito, existe $n \in \mathbb{N}$ y una función biyectiva $f : I_n \to A$.
Supongamos que para alguna $m \in \mathbb{N}$ existe una función biyectiva $g : I_m \to A$.
Tenemos que $f^{-1} : A \to I_n$ tambien es una función biyectiva. Por lo tanto $f^{-1} \circ g : I_m \to I_n$ sería una biyección, pues la composición de funciones biyectivas es biyectiva. Así $m = n$. □

Concluimos que para todo conjunto finito A, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que hay una biyección entre I_n y A.

Definición 4. *Decimos que un conjunto finito tiene n elementos si y sólo si existe una biyección $f : I_n \to A$. En este caso escribimos $|A| = n$*

Definición 5. *La cardinalidad del conjunto vacio es 0, y si el conjunto $A \neq \emptyset$ es finito diremos que la cardinalidad de A es n si $A \sim I_n$. Si A es un conjunto infinito diremos que la cardinalidad es infinita.*

Se denotara $card(A)$ a la cardinalidad del conjunto

Teorema 1. *Sean A y B conjuntos finitos de cardinalidad n y m respectivamente y $f : A \to B$ una función.*

a) Si f es inyectiva, entonces $n \leq m$

b) Si f es suprayectiva, entonces $m \leq n$

Demostración. a) Como $card(A) = n$ y $card(B) = m$, entonces existen funciones biyectivas $g : I_n \to A$ y $h : I_m \to B$. La función

$$h^{-1} \circ f \circ g : I_n \to I_m$$

es inyectiva.
Supongamos que $m < n$. Entonces $I_m \subset I_n$, así que la función $\varphi : I_n \to I_n$ definida por

$$\varphi(j) = \left(h^{-1} \circ f \circ g\right)(j)$$

es inyectiva pero no suprayectiva pues la imagen de φ está contenida en I_m y por lo tanto está contenida propiamente en I_n. Podemos concluir que I_n es equipotente a un subconjunto propio de él mismo, lo cual es imposible debido a que I_n es finito. Entonces debe ser $n \leq m$.

b) Sea $f : A \to B$ suprayectiva entonces f tiene un inverso derecho $g : B \to A$, entonces g es inyectiva entonces por (a) $m \leq n$

□