Lógica proposicional

El objetivo de los matemáticos es descubrir y comunicar ciertas verdades. Las matemáticas son el lenguaje de los matemáticos y una demostración, es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también habla el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de las matemáticas es su presición, no deberá contener ambiguedades y no habrá duda de que es correcta. Desafortunadamente, muchas demostraciones que aparecen en libros de texto y artículos de revistas no tienen la claridad necesaria; dicho en otras palabras, las demostraciones están presentadas adecuadamente para quienes ya conocen el lenguaje de las matemáticas. Por lo tanto, para entender, hacer una demostración o ambas cosas, se debe aprender un idioma nuevo, un método nuevo de razonamiento.
Consideremos las siguientes oraciones.

1. ¿Quién viene?
2. Deténgase
3. El calor dilata los cuerpos
4. 4 es un número impar
5. Juan ama la música
6. La música es amada por Juan

Se trata de seis oraciones diferentes, una interrogativa, una orden y cuatro declarativas. De las dos primeras no podemos decir que sean verdaderas ni falsas; una pregunta puede formularse o no, y una orden puede ser cumplida o no. En cambio, de las cuatro últimas, que son declarativas, tiene sentido decir si son verdaderas o falsas. A éstas las llamamos proposiciones.

Proposición

Es una oración o una expresión matemática que afirma o niega algo.

De esta manera, una proposición tiene un valor de verdad que puede ser verdadera o falsa. En estas notas consideraremos solo proposiciones matemáticas.

Ejemplos de proposiciones verdaderas

- 5 es un número impar
- 2 es un número par

Ejemplos de proposiciones falsas

- 14 es un número impar
- 2=5

Ejemplos de expresiones que no son proposiciones

- 73

- 2x+3=5

Generalmente, para referirnos a proposiciones específicas se usan letras mayúsculas. Por ejemplo
P: 25 es un núero entero impar
Q: 3+4=7
Las proposiciones pueden contener variables. Por ejemplo, sea x un número entero y consideremos
P: 2x+1 es un entero impar.
Esta es una proposición que es verdadera no importa que número entero sea la variable x.
Entonces podemos denotarla por
P(x): 2x+1 es un entero impar.
Hay oraciones o expresiones matemáticas que contienen variables y no son proposiciones.
Por ejemplo,
Q(x) : El número entero x es múltiplo de 3.
Solo será una proposición cuando le otorguemos un valor a x. Una expresión como Q(x), cuyo valor de verdad depende de una o más variables, es lo que se llama una expresión abierta.

Proposiciones compuestas

A partir de proposiciones es posible generar otras proposiciones.

Es decir se puede operar con proposiciones y según sea tales operaciones se utilizan ciertos símbolos, llamados conectivos lógicos.

Conectivo	Operación	Significado	Notación
$\neg$	Negación	No P o no es cierto que P	$\neg P$
$\wedge$	Conjnución	P y Q	$P \wedge Q$
$\vee$	Disyución	P o Q	$P \vee Q$
$\Rightarrow$	Implicación	Si P entonces Q	$P \Rightarrow Q$
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	P si y solo si Q	$P \Leftrightarrow Q$

Tablas de verdad

Una tabla de verdad es un método para determinar cuando una proposición es verdadera

Debiendo examinarse todos los posibles valores de verdad de las proposiciones individuales.

Conjunción

Se trata de una operación binaria. Pues se aplica a dos proposiciones

Ejemplo 1 Consideremos las siguientes proposiciones
P: El número 4 es un entero par.
Q: El número 5 es un entero impar.
Para formar la nueva proposición
R: El número 4 es un entero par y el número 5 es un entero impar.
Así, dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición “P y Q”. Se usa el símbolo $\wedge$ para indicar la palabra “y”. De esta manera, P$\wedge$Q significa

"P y Q".
La proposición $P \wedge Q$ es verdadera si ambas proposiciones P y Q son verdaderas. En cualquier otro caso, es falsa. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

Se trata de una operación binaria. Pues se aplica a dos proposiciones

Ejemplo 2 Consideremos las siguientes proposiciones
P: El número 4 es un entero par.
Q: El número 5 es un entero impar.
Para formar la nueva proposición
R: El número 4 es un entero par o el número 5 es un entero impar.
Así, dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición "P o Q". Se usa el símbolo $\vee$ para indicar la palabra "o". De esta manera, $P \vee Q$ significa "P o Q".
La proposición $P \vee Q$ significa que una o ambas proposiciones son verdaderas. Esto difiere del significado usual que tiene "o" en el lenguaje cotidiano, donde significa una alternativa o la otra, de manera excluyente, cuando hay dos alternativas. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Negación

Se trata de una operación binaria. Pues se aplica a dos proposiciones

Ejemplo 3 Otra manera de obtener nuevas proposiciones a partir de otras es usando la palabra no.
Dada una proposición cualquiera P; podemos formar una nueva proposición no es verdadero que P.
Por ejemplo, si consideramos la proposición (verdadera)
El núumero entero 3 es impar
podemos formar la nueva proposición No es verdadero que el núumero entero 3 es impar, la cual evidentemente es falsa.
Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	¬ P
V	F
F	V

Ejemplo Consideremos la siguiente oración

Siempre hay tranquilidad

esta oración se puede negar de diferentes formas

(a) No siempre hay tranquilidad

(b) No es cierto que siempre haya tranquilidad

(c) A veces no hay tranquilidad

Se observa que en este caso la oración que se forma al simplemente anteponer un no a la proposición sí está bien redactada en español. El inciso (c) usa el a veces para contrarrestar al siempre.

Proposiciones codicionales

Otra manera de conectar dos proposiciones es mediante el uso de condicionales. Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q; podemos formar la nueva proposición Si P; entonces Q. Esta proposición se escribe de manera simbólica como P⇒ Q; la cual también se lee P implica Q. Que la proposición P⇒Q es verdadera significa que si P es verdadera entonces Q también debe ser verdadera (P verdadera obliga a que Q sea verdadera). Una proposición de la forma P⇒Q se conoce como proposición condicional (Q sería verdadera bajo la condición de que P sea verdadera). El signi

cado de P⇒ Q nos dice que la única manera en que la proposición P⇒ Q es falsa es cuando P es verdadera y Q falsa. Así, la tabla de verdad para P⇒ Q es la siguiente.

P	Q	P ⇒ Q
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero
falso	falso	verdadero

La proposición P se llama a menudo hipótesis y el postulado Q conclusión, esto se puede reducir a:

Si P entonces Q

P implica Q

En simbolos matemáticos $P \Rightarrow Q$

Hay entonces cuatro posibles casos a considerar:

1. P es verdadero y Q es verdadero
2. P es verdadero y Q es falso
3. P es falso y Q es verdadeo
4. P es falso y Q es falso

Proposiciones bicondicionales

Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q; podemos considerar tanto P⇒ Q como su recíproca Q ⇒ P:

En primer lugar, P ⇒ Q no es lo mismo que Q ⇒ P; pues tienen distinto signifcado, y en consecuencia, pueden tener valores de verdad diferentes.

Consideremos ahora la proposición

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Ésta afrma que tanto P $\Rightarrow$ Q como Q $\Rightarrow$ P son verdaderas.
Se usa el símbolo $\Leftrightarrow$, para expresar este significado. En consecuencia, leemos P $\Leftrightarrow$ Q, P si y solo si Q. Una proposición de la forma P $\Leftrightarrow$ Q se conoce como proposición bicondicional.

Ejemplo Por ejemplo, sea a un número entero fijo y consideremos:
P : a es par,
Q : a es múltiplo de 2.
Entonces:
P $\Rightarrow$ Q : Si a es par, entonces a es múltiplo de 2;
Q $\Rightarrow$ P : Si a es múltiplo de 2; entonces a es par.
Así, tenemos la proposición (que es verdadera)
P $\Leftrightarrow$ Q : a es par, **si y solo si**, a es múltiplo de 2:

Así, la tabla de verdad para P$\Leftrightarrow$ Q es la siguiente.

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	Q $\Rightarrow$ P	(P $\Rightarrow$ Q) $\wedge$ (Q $\Leftrightarrow$ P)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Por lo que la tabla de verdad para P$\Leftrightarrow$ Q es la siguiente.

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Equivalencia Lógica

Dos proposiciones lógicamente equivalentes son dos proposiciones cuyos valores de verdad coinciden línea por línea en una tabla de verdad, y de esta manera tienen el mismo significado.

Ejemplo Las proposiciones P $\Leftrightarrow$ Q y (P $\wedge$ Q) $\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q) son lógicamente equivalentes, como podemos ver en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$\neg$ P	$\neg$Q	(P $\wedge$ Q)	($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q)	P $\Leftrightarrow$ Q	(P $\wedge$ Q)$\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q)
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V

Esto se evidencia en la coincidencia línea por línea de las dos últimas columnas. La equivalencia lógica de P $\Leftrightarrow$ Q y (P $\wedge$ Q) $\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q) la expresamos de la siguiente manera

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$