Proposición

Es una oración o una expresión matemática que afirma o niega algo.

Ejemplos de proposiciones verdaderas

- 5 es un número impar
- 2 es un número par

Ejemplos de proposiciones falsas

- 14 es un número impar
- 2=5

Ejemplos de expresiones que no son proposiciones

- 73
- 2x+3=5

Teorema

Es una proposición matemática que es verdadera, y puede ser (y ha sido)verificada como verdadera.

Ejemplo

Teorema 1. *Existe una infinidad de números primos.*

Lema

Es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema.

Ejemplo

Lema 1. *Si un número entero n divide a un producto ab y es primo con uno de los factores entonces n divide al otro factor*

Corolario

Es un término que se utiliza en matemáticas y en lógica para designar la evidencia de un teorema.

Ejemplo

Teorema 2. *La suma de las medidas de los ángulos interiores asociados a un triángulo es 180º*

Corolario 1. *Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto, ni más de un obtuso.*

Conjetura

Estas son proposiciones cuya verdad o falsedad aún no ha sido demostrada, pero hay indicios de que son verdaderas.

Ejemplo Cualquier número entero par mayor que 2 es la suma de dos números primos

Demostración

Es un argumento deductivo para una afirmación matemática

Consideremos las siguientes proposiciones.

Ejemplo 1 Dos rectas diferentes en un plano son paralelas o se cortan sólo en un punto.

Ejemplo 2 1=0.

Ejemplo 3 $3x = 5$ y $y = 1$

Ejemplo 4 x no es > 0.

Ejemplo 5 Existe un ángulo θ tal que $\cos(\theta) = \theta$

Observamos que:
La proposición del ejemplo 1 es siempre verdadera
La proposición del ejemplo 2 es siempre falsa
La proposición del ejemplo 3 puede ser verdadero o falso dependiendo del valor de una variable
La proposición del ejemplo 4 puede ser verdadero o falso dependiendo del valor de una variable
La proposición del ejemplo 5 no es tan obvio que es siempre verdadera.
Por lo tanto, es necesario tener algún método para demostrar que tales proposiciones son verdaderas.

Métodos de demostración

Se aplican cuando se desea deducir una proposición Q a partir de una proposición P que se considera verdadera.

Es decir se aplican para demostrar la veracidad de Q, suponiendo la veracidad de P.
Considerando la hipótesis P verdadera, si la implicación se construye utilizando los métodos de demostración y una sucesión de razonamientos verdaderos, por consecuencia se arribará a una conclusión Q verdadera.

Demostraciones directas

Las demostraciones directas, por lo regular, tratan de demostrar una implicación de la forma $p \Rightarrow q$.

La estrategia a seguir es encontrar una sucesión finita de pequeñas implicaciones todas ellas verdaderas, partiendo de $p \Rightarrow q_1$ y terminando en $q_n \Rightarrow q$. En cada paso, se pueden usar la hipótesis p y resultados previamente establecidos, como definiciones, axiomas u otras proposiciones, incluyendo las que se van construyendo en la sucesión.

Tautología

Una tautología es una proposición compuesta que siempre tiene valor de verdad

Sin importar el valor de verdad de sus partes constituyentes.

La expresión lógica de este método es la siguiente:

$$\begin{gathered} p \Rightarrow q_1 \\ q_1 \Rightarrow q_2 \\ q_2 \Rightarrow q_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} \Rightarrow q_n \end{gathered}$$

con $q_n = q$, y haciendo uso de la tautología, se tiene

$$(p \Rightarrow q_1) \wedge (q_1 \Rightarrow q_2) \wedge (q_2 \Rightarrow q_3) \wedge \cdots \wedge (q_{n-1} \Rightarrow q_n) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Ejemplo 1 Si k es un número impar, entonces k^2 es un número impar

Demostración. k es impar entonces $k = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$k^2 = (2m+1)^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Desarrollando el binomio

$$k^2 = 4m^2 + 4m + 1 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Factorizando el 2

$$k^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ y como la suma de números enteros es un número entero

$$k^2 = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto k^2 es un número impar $\square$

Ejemplo 2 Si k es un número par, entonces k^2 es un número par

Demostración. k es par entonces $k = 2m$ con $m \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$k^2 = (2m)^2 = 4m^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Factorizando el 2

$$k^2 = 2(2m^2) \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ y como el producto de números enteros es un número entero

$$k^2 = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto k^2 es un número par $\square$

Ejemplo 3 Si $\sqrt{x^2+1} = x - 1$, entonces $x = 0$

Demostración.

$$\sqrt{x^2+1} = x - 1$$

$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$x^2 + 1 = (x-1)^2$$

$\Rightarrow$ desarrollando el binomio

$$x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$\Rightarrow$ simplificando términos semejantes

$$0 = -2x$$

Por lo tanto $x = 0$ $\square$

Ejemplo 4 Si m es par y n es impar, entonces $m + n$ es impar

Demostración.

$$\begin{pmatrix} m \ par \\ n \ impar \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m = 2k & k \in \mathbb{Z} \\ n = 2\ell + 1 & \ell \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m + n = 2k + 2\ell + 1, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m + n = 2(k + \ell) + 1, \quad k + \ell \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto m+n es impar $\square$

Demostraciones por Contrarreciproca

Observa la siguiente tabla de verdad

P	Q	P⇒Q	¬ Q	¬ P	¬ Q⇒ ¬ P
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

c

Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$$

es decir se parte de la negación de la conclusión ($\neg Q$) y de ello se deduce la negación de la hipótesis ($\neg P$)

Ejemplo 1 Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$

Demostración. Tarea moral □