Demostraciones por Contrarreciproca

Observa la siguiente tabla de verdad

P	Q	P⇒Q	¬ Q	¬ P	¬ Q⇒ ¬ P
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

c

Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$P \ \Rightarrow \ Q \ \equiv \ \neg Q \ \Rightarrow \ \neg P$$

es decir se parte de la negación de la conclusión ($\neg Q$) y de ello se deduce la negación de la hipótesis ($\neg P$)

Ejemplo 1 Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$

Demostración. Negación de la conclusión

$$B^c \not\subset A^c$$

⇒ por definición de subconjunto

$$\exists \, x \ \in \ B^c, \quad \ni \quad x \ \notin \ A^c$$

⇒ por la definición de complemento

$$\exists \, x \ \in \ A, \quad \ni \quad x \ \notin \ B$$

⇒ por la definición de subconjunto

$$A \not\subset B$$

que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 2 Demostrar lo siguiente: Si A es cualquier conjunto, entonces $A \bigcap A^c = \emptyset$

Demostración. Negación de la conclusión

$$A \bigcap A^c \neq \emptyset$$

⇒

$$\exists \, x \ \in \ A \bigcap A^c$$

⇒ por la definición de intersección

$$\exists \, x \ \in \ A \ \ y \ \ x \in A^c$$

⇒ por la definición de complemento

$$x \in A \ \ y \ \ x \notin A$$

Por lo tanto A no es un conjunto, que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 3 Demostrar lo siguiente:
Si $p,\ q\ \in\ \mathbb{R}^+$ son tal que $\sqrt{pq} \neq \dfrac{p+q}{2}$ entonces $p \neq q$

Demostración. Negación de la conclusión

$$p = q$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{pq} = \sqrt{pp} = p$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p+q}{2} = \frac{p+p}{2} = \frac{2p}{2} = p$$

por lo tanto

$$\sqrt{pq} = \frac{p+q}{2}$$

que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 4 Demostrar lo siguiente:
Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si k^2 es par, entonces k es par

Demostración. Negación de la conclusión k no es par $\Rightarrow$ k es de la forma

$$2n+1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ elevando k al cuadrado

$$k^2 = (2n+1)^2, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ desarrollando el binomio

$$k^2 = 4n^2 + 4n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ factorizando el 2

$$k^2 = 2\underbrace{(2n^2 + 2n)}_{m\ entero} + 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ sumas y producto de enteros es entero

$$k^2 = 2m + 1, \quad m \in \mathbb{Z}$$

por lo tanto k^2 es impar que es la negación de la hipótesis □

Demostraciones por Reducción al absurdo

Observa las siguientes tablas de verdad

P	Q	P⇒Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	P∧Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	¬Q	P∧ ¬Q
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	V	F

W	¬W	W∧ ¬W
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

P∧ ¬Q	W∧ ¬W	P∧ ¬Q ⇒ W∧ ¬W
F	F	V
V	F	F
F	F	V
F	F	V

Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$P \ \Rightarrow \ Q \ \equiv \ P \ \wedge \ \neg \ Q \ \Rightarrow \ W \ \wedge \ \neg \ W$$

Absurdo

Un absurdo es una proposición que siempre es falsa
Es decir para demostrar $P \ \Rightarrow \ Q$ se construye un absurdo $W \wedge \neg W$ usando la hipótesis P y la negación de la conclusión $\neg \ Q$

Ejemplo 1 Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $A - B = \emptyset$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $A \subset B$ y la negación de la conclusión $A - B \neq \emptyset$

$$\underbrace{A \subset B}_{P} \quad y \quad \underbrace{A - B \neq \emptyset}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$ usando las definiciones

$$\underbrace{\forall \ x \in A \ \Rightarrow \ x \in B}_{P} \quad y \quad \underbrace{\exists \ x \in A \ \ y \ \ x \notin B}_{\neg Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\forall \ x \in A \ \Rightarrow \ x \in B}_{P} \quad y \quad \underbrace{\exists \ x \in A \ \ni \ x \notin B}_{Q}$$

Por lo tanto se tiene

$$\underbrace{\forall \ x \in A \ \Rightarrow \ x \in B}_{W} \quad y \quad \underbrace{\exists \ x \in A \ \ni \ x \notin B}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 2 Demostrar lo siguiente: Sean $m, \ n \in \mathbb{N}$. Si mn es impar entonces m y n son impares

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis mn es impar y la negación de la conclusión n par ó m par

$$\underbrace{n \cdot m, \quad impar}_{P} \quad y \quad \underbrace{m \; par \; ó \; n \; par}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$ usando las definiciones

$$\underbrace{n \cdot m = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}}_{P} \quad y \quad \underbrace{n = 2r, \quad r \in \mathbb{Z} \;\; ó \;\; m = 2t, \quad t \in \mathbb{Z}}_{\neg Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{n \cdot m = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}}_{P} \quad y \quad \underbrace{n \cdot m = 2r \cdot m \quad ó \quad n \cdot m = n \cdot 2t}_{Q}$$

Por lo tanto se tiene

$$\underbrace{n \cdot m = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}}_{W} \quad y \quad \underbrace{n \cdot m = 2r \cdot m \quad ó \quad n \cdot m = n \cdot 2t}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 3 Demostrar lo siguiente: Si $n, \; m \in \mathbb{Z}$,son tal que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$, entonces n es par

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, \; m \in \mathbb{Z}$ y la negación de la conclusión n impar

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, \; m \in \mathbb{Z}}_{P} \quad y \quad \underbrace{n = 2t+1, \quad t \in \mathbb{Z}}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$ elevando n al cuadrado

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, \; m \in \mathbb{Z}}_{P} \quad y \quad n^2 = (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 2(2t^2 + t) + 1, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ elevando n al cubo

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, \; m \in \mathbb{Z}}_{P} \quad y \quad n^3 = (2t+1)^3 = 8t^3+12t^2+6t+1 = 2(4t^3+6t^2+3)+1, \;\; t \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ sumando n,n^2 y n^3 se tiene

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, \; m \in \mathbb{Z}}_{P} \quad y \quad n+n^2+n^3 = (2t+1)+2(2t^2+t)+1+2(4t^3+6t^2+3)+1, \;\; t \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ simplificando

$$\underbrace{n + n^2 + n^3 = m + m^2, \quad n, \; m \in \mathbb{Z}}_{P} \quad y \quad n + n^2 + n^3 = 2(t + 2t^2 + t + 4t^3 + 6t^2 + 3 + 1) + 1, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ suma de impares es impar

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2, \quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{P} \qquad y \qquad n+n^2+n^3=2(m)+1, \quad m\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ el producto $m+m^2=m(m+1)$ es par, por lo tanto

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2=m(m+1), \quad es \quad par \quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{W} \quad y \quad \underbrace{n+n^2+n^3=2(m)+1, \quad es \quad impar \quad m\in\mathbb{Z}}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 4 Demostrar lo siguiente: $\forall\ a\neq 0$ se tiene que $a^2>0$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $a\neq 0$ y la negación de la conclusión $a^2\leq 0$

$$\underbrace{a\neq 0}_{P} \qquad y \qquad \underbrace{a^2=a\cdot a\leq 0}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{a\neq 0}_{W} \qquad y \qquad \underbrace{a=0}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 5 Demostrar lo siguiente: Si $a<1$, entponces $a<a^2$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $a>1$ y la negación de la conclusión $a^2\leq a$

$$\underbrace{a>1}_{P} \qquad y \qquad \underbrace{a^2\leq a}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{a>1}_{P} \qquad y \qquad \underbrace{a-a^2\geq 0}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{a>1}_{P} \qquad y \qquad \underbrace{a(1-a)\geq 0}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{a>1}_{P} \qquad y \qquad \underbrace{a\geq 0 \quad y \quad 1-a\geq 0}_{\neg Q}$$

por lo tanto

$$\underbrace{a>1}_{W} \qquad y \qquad \underbrace{a\leq 1}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Demostraciones por casos

Éste método es posible utilizarlo cuando la hipótesis P es una disyución de casos, es decir, cuando

$$P = P_1 \text{ ó } P_2 \text{ ó } P_3 \cdots \text{ ó } P_n$$

Éste método esta basado en la equivalencia

$$P \Rightarrow Q \equiv (P_1 \Rightarrow Q \wedge P_2 \Rightarrow Q \wedge P_3 \Rightarrow Q \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q)$$

Éste método se explica señalando que para demostrar $P \Rightarrow Q$, es necesario demostrar que todos los casos de la hipótesis implican la conclusión

Ejemplo 1 Demostrar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 + n + 1$ es impar

Demostración. Caso 1
n par $\Rightarrow n^2$ es par $n^2 + n$ es par $\Rightarrow n^2 + n + 1$ es impar Caso 2
n impar $\Rightarrow n^2$ es impar $n^2 + n$ es par $\Rightarrow n^2 + n + 1$ es impar □

Ejemplo 2 Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $|a| \geq 0$

Demostración.

Definición 1.

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Caso 1

$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; |a| = a \geq 0$$

Caso 2

$$a < 0 \;\Rightarrow\; |a| = -a > 0 \;\Rightarrow\; |a| \geq 0$$

□

Ejemplo 3 Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = |-a|$

Demostración.

Definición 2. *Se tiene*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Caso 1

$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; |a| = a$$

por otro lado

$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; -a \leq 0 \;\Rightarrow\; |-a| = -(-a) = a$$

por lo tanto

$$|a| = |-a|$$

Caso 2

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

por otro lado

$$a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow |-a| = -a$$

por lo tanto

$$|a| = |-a|$$

□

Demostraciones por contraejemplo

El método por contraejemplo se aplica de manera muy particular para demostrar la falsedad de proposiciones cuya hipótesis está construída mediante un çuantificador universal". Esto es, se aplica para demostrar la falsedad de una proposición que tenga una conclusión referida para "todos los elementos de un cierto conjunto"Qué entender por un contraejemplo

Para demostrar la falsedad de proposiciones de este tipo, basta exhibir un elemento que satisfaga la hipótesis de la proposición, pero que no satisfaga su conclusión. A dicho elemento se le conoce con el nombre de contraejemplo. El uso del contraejemplo, es muy útil cuando uno se encuentra ante una proposición con cuantificador universal, de la cuál no se sabe si es verdadera o falsa.

La primera idea es buscar un contraejemplo. Si no se encuentra en una primera instancia, se intentará demostrar su veracidad aplicando los otros métodos o una combinación de ellos.

Ejemplo 1 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$a,\ b\ \in\ \mathbb{R}\ \Rightarrow\ |a+b| = |a| + |b|$$

Demostración. Si tomamos $a = 5$ y $b = -3$ se tiene

$$|5-3| = |2| = 2 \neq 8 = 5+3 = |5| + |-3|$$

por lo tanto la proposición es falsa □

Ejemplo 2 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$a,\ b\ \in\ \mathbb{R}\ \ y\ \ a^2 = b^2\ \Rightarrow\ a = b$$

Demostración. Si tomamos $a = -$ y $b = 2$ se tiene

$$a^2 = 4 = b^2$$

pero

$$-2 = a \neq 2 = b$$

por lo tanto la proposición es falsa □

Ejemplo 3 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$A - B = B - A, \quad \forall \ \ A, \ B \ \ conjuntos$$

Demostración. Si tomamos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \ y \quad \ B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

se tiene que

$$A - B = \{1, 2\} \neq \{6, 7\} = B - A$$

por lo tanto la proposición es falsa □

Observaciones: No obstante que puede haber muchos casos en los que si se satisfaga la proposición, basta con un solo caso en el que no ocurra, para que tal proposición sea falsa.