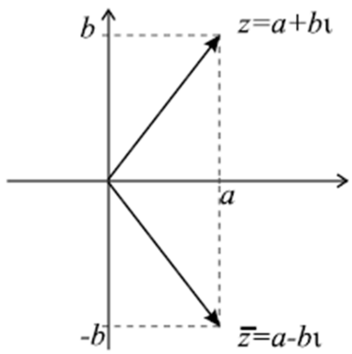
El conjugado de un número complejo

Definición 1. *Si a y b son números reales, y z es el número complejo $a+ib$, entonces al número complejo $a-ib$ se le denomina el conjugado de z, y se denota $\overline{z}=a-ib$*



Teorema 1. *Si z y w son números complejos, entonces:*

1. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
2. $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
3. $Re(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$
4. $Im(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
5. *Si z es un número complejo distinto de cero, entonces $z\cdot\overline{z}$ es un número real y positivo*
6. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$ *para* $w\neq 0$
7. $\overline{\overline{z}}=z$

Demostración. Si $z=a+ib$ y $w=c+id$ entonces:

1. $\overline{z}+\overline{w}=(a-ib)+(c-id)=(a+c)-i(b+d)=\overline{z+w}$
2. $\overline{z}\cdot\overline{w}=(a-ib)\cdot(c-id)=(ac-bd)-i(ad+bc)=\overline{z\cdot w}$
3. $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{(a+ib)+(a-ib)}{2}=\dfrac{2a}{2}=a=Re(z)$
4. $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\dfrac{(a+ib)-(a-ib)}{2i}=\dfrac{2bi}{2i}=b=Im(z)$
5. $z\cdot\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$
   Como $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $a^2+b^2\geq 0$, y como alguno de ellos es distinto de cero, entonces $a^2+b^2\neq 0$
6. Tenemos que $\overline{w}\,\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{wz}}{w}=\overline{z}$. Así $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

7. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib = z$

$\square$