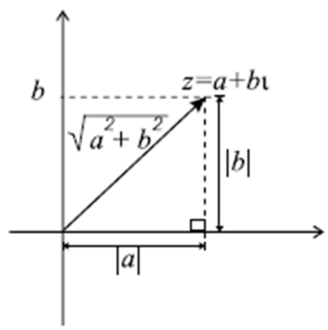
El módulo de un número complejo

Definición 1. *Si z es un número complejo, el módulo de z, que denotaremos $|z|$, se define como la raíz cuadrada no negativa de $z \cdot \overline{z}$, esto es,*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

Ejemplo Tenemos que

1. Si $z = 8 - 15i$, entonces $|z| = \sqrt{289} = 17$
2. Si $z = -24 + 7i$, entonces $|z| = \sqrt{625} = 25$
3. Si $z = -5 - 12i$, entonces $|z| = \sqrt{169} = 13$
4. Si $z = 1 + i$, entonces $|z| = \sqrt{2}$



El valor absoluto de un número complejo $z = a + ib$ esta determinado por

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposición 1. *1.* $|zw| = |z| \cdot |w|$

2. Si $w \neq 0$, *entonces* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

3. $-|z| \leq Re(z) \leq |z|$ *y* $-|z| \leq Im(z) \leq |z|$*; esto es,* $|Re(z)| \leq |z|$ *y* $|Im\ z| \leq |z|$

4. $|\overline{z}| = |z|$

5. $|z + w| \leq |z| + |w|$

6. $|z - w| \geq |\ |z| - |w|\ |$

7. $|z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}\sqrt{|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2}$

Demostración. 1. $|zw| = \sqrt{zw \cdot \overline{zw}} = \sqrt{zw \cdot \overline{z}\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z| \cdot |w|$

2. $|w|\left|\frac{z}{w}\right| = \left|w \cdot \frac{z}{w}\right| = |z|$ por lo que $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

3. Si $z = a + ib$, entonces $-\sqrt{a^2+b^2} \leq a \leq \sqrt{a^2+b^2}$ puesto que $b^2 \geq 0$. La otra se prueba de manera análoga
4. Si $z = a + ib$, entonces $\overline{z} = a - ib$, y claramente tenemos que $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2} = |\overline{z}|$
5. Tenemos que

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\ &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} \end{aligned}$$

   Pero $z\overline{w}$ es el conjugado $w\overline{z}$. Por tanto $|z|^2 + |w|^2 + 2Re(w\overline{z}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|w\overline{z}| = (|z| + |w|)^2$

6. Al aplicar 5 a w y $z - ww$ obtenemos que $|z| = |w + (z-w)| \leq |w| + |z-w|$ por tanto $|z-w| \geq |w| + |z-w|$. Al intercambiar los roles de z y w, obtenemos el resultado
7. Sea $v = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \quad t = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \quad s = \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \quad c = \frac{s}{t}$. Ahora considérese

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - c\overline{w}_k|^2$$

   lo cual es ≥ 0 e igual a

$$v + |c|^2 t - c\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k \overline{w}_k - \overline{c}\sum_{k=1}^{1} z_k w_k = v + |c|^2 t - 2Re(\overline{c}s) = v + \frac{|s|^2}{t} - 2Re\frac{s\overline{s}}{t}$$

   Dado que t es real y $s\overline{s} = |s|^2$ es real,

$$v + \left(\frac{|s|^2}{t}\right) - 2\left(\frac{|s|^2}{t}\right) = v - \frac{|s|^2}{t} \geq 0$$

   Así, que $|s|^2 \leq vt$, que es el resultado deseado

□

Ejemplo Muestre la identidad de Lagrange

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right) - \sum_{k<j} |z_k\overline{w}_j - z_j\overline{w}_k|^2$$

Deduzca la desigualdad de Cauchy Shwarz a partir de su demostración

Solución Utilizando la identidad $z\overline{z} = |z|^2$ tenemos que para el lado derecho

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right) - \sum_{k<j} |z_k\overline{w}_j - z_j\overline{w}_k|^2$$

$$= (z_1\overline{z}_1 + \cdots z_n\overline{z}_n)(w_1\overline{w}_1 + \cdots w_n\overline{w}_n) - \sum_{1\le k<j\le n}(z_k\overline{w}_j - z_j\overline{w}_k)(\overline{z}_k w_j - \overline{z}_j w_k)$$

$$= (z_1\overline{z}_1 + \cdots z_n\overline{z}_n)(w_1\overline{w}_1 + \cdots w_n\overline{w}_n) - \sum_{1\le k<j\le n} z_k\overline{z}_k w_j\overline{w}_j - \sum_{1\le k<j\le n} z_j\overline{z}_j w_k\overline{w}_k - \sum_{1\le k<j\le n} z_k\overline{z}_j w_k\overline{w}_j + \sum_{1\le k<j\le n} z_j\overline{z}_k w_j\overline{w}_k$$

Observe que

$$\sum_{1\le k<j\le n} a_k b_j + \sum_{1\le k<j\le n} a_j b_k = \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} a_k b_j$$

Entonces se tiene que

$$(z_1\overline{z}_1 + \cdots z_n\overline{z}_n)(w_1\overline{w}_1 + \cdots w_n\overline{w}_n) - \sum_{1\le k<j\le n} z_k\overline{z}_k w_j\overline{w}_j - \sum_{1\le k<j\le n} z_j\overline{z}_j w_k\overline{w}_k - \sum_{1\le k<j\le n} z_k\overline{z}_j w_k\overline{w}_j + \sum_{1\le k<j\le n} z_j\overline{z}_k w_j\overline{w}_k$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} z_k\overline{z}_k w_j\overline{w}_j - \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} z_k\overline{z}_k w_j\overline{w}_j + \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} z_k\overline{z}_j w_k\overline{w}_j$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} z_k\overline{z}_k w_j\overline{w}_j + \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} z_k\overline{z}_j w_k\overline{w}_j$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} z_k\overline{z}_j w_k\overline{w}_j$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} (z_k w_k)(\overline{z_j w_j})$$

$$= (z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n)(\overline{z_1 w_1} + \cdots + \overline{z_n w_n})$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k w_k}\right)$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz está dada por

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)$$

si $z \in \mathbb{C}$ entonces $|z|^2 \in \mathbb{R}$ y $|z|^2 \ge 0$, por lo que

$$\sum_{k<j} |z_k\overline{w}_j - z_j\overline{w}_k|^2 \ge 0$$

Así, se tiene que

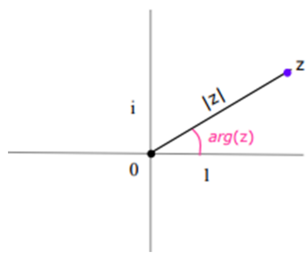
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right) - \sum_{k<j} |z_k\overline{w}_j - z_j\overline{w}_k|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)\end{aligned}$$

Cada número complejo $z = a + ib$ esta determinado por su norma

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y por su argumento

$$\theta = \arg(z) = \textit{ángulo entre } z \textit{ y eje } X$$



Cualquier número complejo se puede escribir en la forma siguiente, llamada forma polar

$$z = \rho(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)$$

y como son válidas las propiedades asociativas y conmutativas del producto, se tiene para

$$\begin{aligned}z_1 &= \rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1) \\ z_2 &= \rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)\end{aligned}$$

el producto es

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (\rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1))(\rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)) \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\ \theta_1 \cos\ \theta_2 - \text{sen}\ \theta_1\,\text{sen}\ \theta_2)] + i[(\cos\ \theta_1\,\text{sen}\ \theta_2 + \text{sen}\ \theta_1 \cos\ \theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos\ (\theta_1 + \theta_2) + i(\text{sen}\ (\theta_1 + \theta_2))]\end{aligned}$$

por lo tanto el resultado de multiplicar dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.