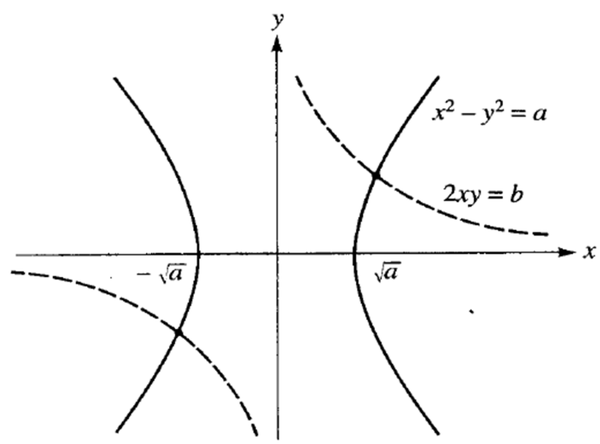
Ecuaciones de segundo grado con números complejos

Proposición 1. *Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$.*

Demostración. Sea $z = a + ib$. Queremos encontrar $w = x + iy$ tal que

$$a + ib = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

así que debemos resolver simultaneamente $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$. La existencia de tales soluciones es geométricamente clara a partir del examen de las gráficas de las dos ecuaciones. Éstas se muestran en la figura



Sabemos que

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2$$

Por tanto

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y por ende

$$x^2 = \frac{\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}{2} \quad y \quad y^2 = \frac{\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}{2}$$

Si hacemos

$$\alpha = \sqrt{\frac{\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}{2}} \quad y \quad \beta = \sqrt{\frac{\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}{2}}$$

donde $\sqrt{\ }$ denota la raíz cuadrada positiva de números reales positivos, entonces, en el caso que b es positivo, tenemos que $x = \alpha$ y $y = \beta$ o $x = -\alpha$ y $y = -\beta$; en el caso que b es negativo, tenemos $x = \alpha$ y $y = -\beta$ o $x = -\alpha$ y $y = \beta$, concluimos que la ecuación $w^2 = z$ tiene soluciones $\pm(\alpha + \mu\beta i)$, donde $\mu = 1$ si $b \geq 0$, y $\mu = -1$ si $b < 0$ □

Ejemplo Encuentre las soluciones de las ecuaciones

1. $(z + 1)^2 = 3 + 4i$

2. $z^4 - i = 0$

Solución Tenemos que

1. Sea $w = z + 1$ entonces se debe resolver la ecuación $w^2 = 3 + 4i$.
   Sustituyendo en la fórmula, se obtiene que $a = 3$ y $b = 4$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{3^2 + 4^2})}{2}} = 2 \quad y \quad \beta = \sqrt{\frac{(-3 + \sqrt{3^2 + 4^2})}{2}} = 1$$

   por lo que $w = z + 1 = \pm(2 + i)$, donde $z = \pm(2 + i) - 1$. Por lo tanto las soluciones buscadas son

$$z_1 = 1 + i \quad y \quad z_2 = -3 - i$$

2. Sea $w^2 = z^4 = i$. sustituyendo en la fórmula $a = 0$ y $b = 1$ se obtiene

$$\alpha = \sqrt{\frac{(0 + \sqrt{0^2 + 1^2})}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y \quad \beta = \sqrt{\frac{(-0 + \sqrt{0^2 + 1^2})}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   de donde

$$w = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

   Considere la ecuación $z^2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$. Otra vez sustituya en la fórmula, ahora con $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual se obtiene

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)$$

   Del otro valor para w se obtienen

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)$$