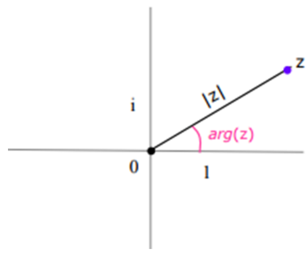
Representación polar, Teorema de Moivre, Raices de números complejos

Cada número complejo $z = a + ib$ esta determinado por su norma

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y por su argumento

$$\theta = \arg(z) = \textit{ángulo entre } z \textit{ y eje } X$$



Cualquier número complejo se puede escribir en la forma siguiente, llamada forma polar

$$z = \rho(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)$$

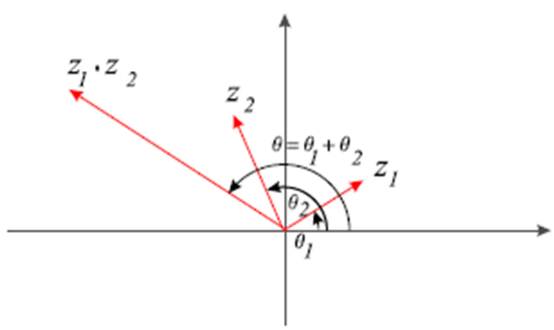
y como son válidas las propiedades asociativas y conmutativas del producto, se tiene para

$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)$$

el producto es

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1))(\rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)) \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\ \theta_1 \cos\ \theta_2 - \text{sen}\ \theta_1\,\text{sen}\ \theta_2)] + i[(\cos\ \theta_1\,\text{sen}\ \theta_2 + \text{sen}\ \theta_1 \cos\ \theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos\ (\theta_1 + \theta_2) + i(\text{sen}\ (\theta_1 + \theta_2))] \end{aligned}$$

por lo tanto el resultado de multiplicar dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.



Ejemplo En el caso de
$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1)$$
para z_1^2 se tiene
$$\begin{aligned} z_1^2 &= z_1 z_1 \\ &= \rho_1^2[\cos\ (\theta_1+\theta_1) + i(\text{sen}\ (\theta_1+\theta_1))] \\ &= \rho_1^2[\cos\ (2\theta_1) + i(\text{sen}\ (2\theta_1))] \end{aligned}$$
Por lo tanto
$$z_1^2 = \rho_1^2[\cos\ (2\theta_1) + i(\text{sen}\ (2\theta_1))]$$

Ejemplo En el caso de
$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1)$$
para z_1^3 se tiene
$$\begin{aligned} z_1^3 &= z_1^2 z_1 \\ &= \rho_1^3[\cos\ (2\theta_1+\theta_1) + i(\text{sen}\ (2\theta_1+\theta_1))] \\ &= \rho_1^3[\cos\ (3\theta_1) + i(\text{sen}\ (3\theta_1))] \end{aligned}$$
Por lo tanto
$$z_1^3 = \rho_1^3[\cos\ (3\theta_1) + i(\text{sen}\ (3\theta_1))]$$

Caso general En el caso de
$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1)$$
para z_1^n se tiene
$$z_1^n = \rho_1^n[\cos\ (n\theta_1) + i(\text{sen}\ (n\theta_1))]$$
Por lo tanto si $z = r(\cos\ \theta) + i\,\text{sen}\ \theta$, entonces se tiene la fórmula de Moivre, donde para cualquier entero n,
$$(\cos\ (\theta) + i(\text{sen}\ (\theta)))^n = (\cos\ (n\theta) + i(\text{sen}\ (n\theta)))$$

Raíces de números complejos La multiplicación compleja, usando la representación en coordenadas polares, nos conduce a una formula que nos permite encontrar las raíces enésimas de cualquier número complejo.
Sea w un número complejo, usando la fórmula de Moivre podemos resolver la ecuación $z^n = w$. Supongamos que $w = r(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)$, entonces se tiene que las soluciones de la ecuación estan dadas por
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$
cada uno de los valores $k = 0, 1, ..., n-1$ da un valor diferente de z.

Ejemplo Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $z^6 + 8 = 0$
2. $z^3 - 4 = 0$

Solución 1. Para $z^6 = -8$, se tiene que $n = 6$, $r = 8$ y $\theta = \pi$ en la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$

es decir

$$z_k = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)\right)$$

por lo que para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ se tiene

$$z_0 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = i\sqrt{2}$$

$$z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_4 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -i\sqrt{2}$$

$$z_5 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

2. Para $z^3 = 4$, se tiene que $n = 3$, $r = 4$ y $\theta = 0$ en la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$

es decir

$$z_k = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(0 + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(0 + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$

por lo que para $k = 0, 1, 2$ se tiene

$$z_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos(0) + i\,\text{sen}(0)\right) = \sqrt[3]{4}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$