Conjuntos

El término conjunto lo consideramos un concepto primitivo no definido (podemos pensarlo como un agregado o familia de objetos, etc.; sin embargo, los términos agregado, familia, etc., son de alguna forma sinónimos del término conjunto); al pensar en un conjunto pensaremos en los miembros que lo constituyen, de tal forma que desde el inicio hay una relación
Un conjunto es una colección de objetos, donde debe quedar claro cuándo un objeto es miembro del conjunto y cuándo no. A los objetos que forman parte de un conjunto los llamaremos sus elementos. Así pues para dar un conjunto debemos decir quiénes son exactamente todos sus elementos y, así, dado cualquier objeto podemos decidir si es o no un elemento del conjunto.

Notación Para expresar que un objeto es elemento del conjunto usaremos el símbolo $\in$.
Escribiremos $x \in A$ para expresar

$$x \text{ } es \text{ } elemento \text{ } de \text{ } A \text{ } o \text{ } x \text{ } es \text{ } miembro \text{ } de \text{ } A \text{ } o \text{ } también \text{ } x \text{ } pertenece \text{ } a \text{ } A$$

A $\in$ se le conoce como el símbolo de pertenencia.
De igual manera usaremos $\notin$ para expresar la negación de la pertenencia (la no pertenencia) esto es, escribiremos, $x \notin A$ para expresar

$$x \text{ } no \text{ } es \text{ } elemento \text{ } de \text{ } A \text{ } o \text{ } x \text{ } no \text{ } es \text{ } miembro \text{ } de \text{ } A \text{ } o \text{ } también \text{ } x \text{ } no \text{ } pertenece \text{ } a \text{ } A$$

Para dar un conjunto debemos expresar de alguna manera quiénes son los elementos que lo determinan y esto se puede hacer de la siguiente forma

a) Dando una lista posible de todos los elementos del conjunto, cuando esto sea posible, lo que generalmente se puede hacer cuando la lista es pequeña, o cuando dados algunos de sus elementos y usando puntos suspensivos se entiende sin duda alguna cuáles son los demás elementos.

b) Dando una propiedad (proposición) que resulte verdadera solamente para los elementos del conjunto y que sea falsa para los objetos que no pertenecen a él.

Ejemplo Si $a_1, a_2, ..., a_n$ son todos los objetos del conjunto A, escribimos

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

y a esta forma de dar un conjunto se le llama por extensión

Ejemplo En el caso en que los elementos del conunto A estén descritos por una proposición $p(x)$, escribiremos

$$A = \{x \mid p(x) \text{ } es \text{ } verdadera\}$$

esto significa que un objeto a pertenece al conjunto A si y sólo si $p(a)$ es verdadera. De esta manera, si $p(b)$ es falsa, entonces podemos afirmar que $b \notin A$.

Ejemplo Algunos conjuntos

a) $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales

b) $\mathbb{Q}$ representa el conjunto de los números racionales

c) $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de los números enteros

d) El conjunto vacío, denotado por $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos, es decir, $\emptyset = \{\}$.

Definición 1. *Dos conjuntos A y B son inguales (A=B) si ambos tienen exactamente los mismos elementos, es decir, $A = B$ si y sólo si son verdaderas las proposiciones*

$$si\ x \in A,\ entonces\ x \in B\ \ y\ \ x \in B,\ entonces\ x \in A$$

Usando conectivos lógicos, la definición de igualdad se expresa:

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, x\ (x \in A\ \Leftrightarrow\ x \in B)$$

Para mostrar que dos conjuntos dados no son iguales se expresa

$$A \neq B\ \Leftrightarrow\ \exists\, x\ [(x \in A\ \wedge\ x \notin\ B)]\ \vee\ (x \in B \wedge x \notin A)$$

Definición 2. *Dados dos conjuntos A y B, diremos que A es un subconjunto de B y lo denotaremos por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es también elemento de B.*

$$A \subseteq B\ \overset{def}{\Leftrightarrow}\ \forall\, x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Evidentemente si $A = B$, entonces $A \subseteq B$, así que en el caso en que $A \subseteq B$ y $A \neq B$, diremos que A es un subconjunto propio de B y lo denotaremos por $A \subsetneq B$

$$A \subsetneq B\ \Leftrightarrow\ \exists\, x\ (x \in A\ \wedge\ x \notin B)$$

Para mostrar que $\nsubseteq B$ es suficiente exhibir un elemento de A que no sea elemento de B.

Teorema 1. *Dos conjuntos son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

Teorema 2. *Sean A y B conjuntos arbitrarios. Entonces*

a) $\emptyset \subseteq A$.

b) $A \subseteq A$

c) Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

,

Demostración. a) Si $\emptyset \nsubseteq A$, entonces deberíamos poder exhibir un elemento en $\emptyset$ que no pertenece a A, lo cual es imposible ya que $\emptyset$ no tiene elementos. Por lo tanto debe ser $\emptyset \nsubseteq A$.

b) Dado que todo elemento de A pertenece a A entonces $A \subseteq A$

c) Sea $x \in A$. Como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$ y como $B \subseteq C$, entonces $x \in C$. Por lo tanto $A \subseteq C$

$\square$

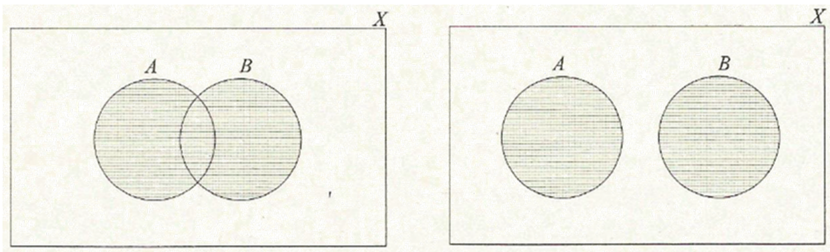
Operaciones entre conjuntos

Definición 3. *Sean A,B conjuntos. La unión de A y B es el conjunto*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

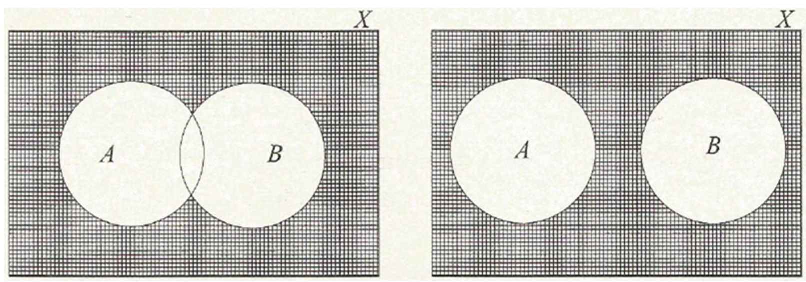
Según la definición, se tiene entonces que

$$x \in A \cup B \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in A \ \vee \ x \in B)$$



La negación sería

$$x \notin A \cup B \ \Leftrightarrow \ (x \notin A \ \wedge \ x \notin B)$$



Teorema 3. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

a) $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$

b) $A = A \cup \emptyset$; $A \cup A = A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (C \cup C)$

d) $A \cup B = B$ *si y sólo si* $A \subseteq B$

Demostración. a) Sea $x \in A$. Luego es verdadera: $x \in A$ *o* $x \in B$ y por lo tanto $x \in A \cup B$ y así $A \subseteq A \cup B$

b) ($\subseteq$) Si $x \in A \cup \emptyset$, por definición se tiene que $x \in A$ o $x \in \emptyset$. Pero $x \in \emptyset$ es falsa, sin importar quien es x, así que debe ser $x \in A$.
($\supseteq$) Por inciso (a), tenemos $A \subseteq A \cup \emptyset$

c) ($\subseteq$) Si $x \in (a \cup B) \cup C$, entonces $x \in A \cup B$ o $x \in C$. Si $x \in C$, por el inciso (a), entonces $x \in B \cup C$ y nuevamente por el inciso (a), $x \in A \cup (B \cup C)$. Ahora, si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ *o* $x \in B$. En el caso de que $x \in A$, obtenemos $x \in A \cup (B \cup C)$ y en caso de que $x \in B$ obtenemos que $x \in B \cup C$ y de aquí $x \in A \cup (B \cup C)$, aplicando inciso (a). Concluimos que $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.
($\supseteq$) De manera similar se prueba que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

d) ($\Rightarrow$) Supongamos que $A \cup B = B$. Por el inciso (a), $A \subseteq A \cup B = B$
($\Leftarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$. Por el inciso (a) $B \subseteq A \cup B$ así que sólo debemos probar que $A \cup B \subseteq B$. Para esto, sea $x \in A \cup B$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, como por hípótesis $A \subseteq B$, se debe tener $x \in B$. Así que $x \in A$ o $x \in B$ implica, en cualquiera de los dos casos que, $x \in B$, luego $A \cup B \subseteq B$. Entonces $A \cup B = B$

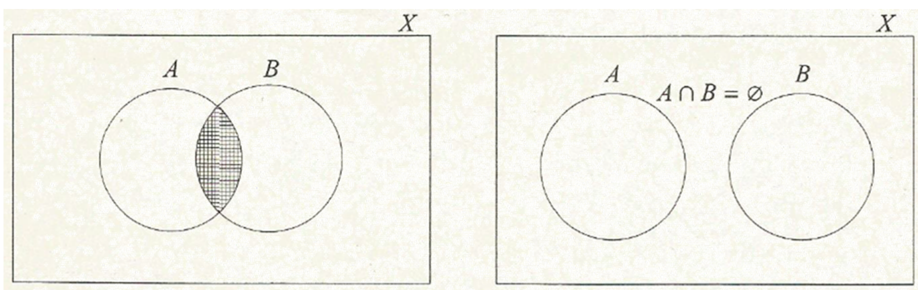
$\square$

Definición 4. *Sean A,B conjuntos. La intersección de A y B es el conjunto*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Según la definición, se tiene entonces que

$$x \in A \cap B \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in A \ \wedge \ x \in B)$$



La negación sería

$$x \notin A \cap B \ \Leftrightarrow \ (x \notin A \ \vee \ x \notin B)$$

Teorema 4. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

a) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) $A \cap B = A$ *si y sólo si* $A \subseteq B$

Demostración. a) Si fuera $A \cap \emptyset \neq \emptyset$, entonces, por definición, existiría un elemento $x \in A \cap \emptyset$, lo que significaría que $x \in \emptyset$, que es absurdo ya que $\emptyset$ no tiene elementos, por tanto no puede se $A \cap \emptyset \neq \emptyset$ y así $A \cap \emptyset = \emptyset$

b) ($\subseteq$) Si $x \in (A \cap B) \cap C$ entonces $x \in A \cap B$ y $x \in C$, lo que implica, por definición, que ($x \in A$ *y* $x \in B$) y $x \in C$ y como $x \in B$ y $x \in C$, se tiene que $x \in B \cap C$ y ya que también $x \in A$, entonces $x \in A \cap (B \cap C)$.
($\supseteq$) Análoga a la demostración anterior

c) ($\Rightarrow$) Supongamos $A \cap B = A$. Entonces $A = A \cap B \subseteq B$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$.($\subseteq$) $A \cup B \subseteq A$
($\supseteq$) $A \subseteq A \cap B$ puesto que si $x \in A$, entonces $x \in B$ por hipótesis. Luego $x \in A \cap B$

$\square$

Teorema 5. *Sean A, B y C conjuntos*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$.*
2. *Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$.*

Demostración. a) Sea $x \in A \cup C$. Entonces $x \in A$ o $x \in C$. Como $x \in A$ implica $x \in B$, se tiene que $x \in B$ o $x \in C$ y por lo tanto $x \in B \cup C$. Luego $A \cup C \subseteq B \cup C$

b) Sea $x \in A \cup B$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$. En cualquiera de los dos casos, por hipótesis, se tiene que $x \in C$ con lo que $A \cup B \subseteq C$

$\square$

Teorema 6. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Demostración. ($\subseteq$) Sea $x \in A \cap (B \cup C)$. Luego $x \in A$ y $x \in B \cup C$. Esto es $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$).

a) Si $x \in B$, entonces $x \in A \cap B$ por tanto $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) Si $x \in C$, entonces $x \in A \cap C$ por tanto $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Como en ambos casos $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, entonces $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
($\supseteq$) Ahora, sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Luego $x \in A \cup B$ o $x \in A \cup C$. Si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$ y por ser $B \subseteq B \cup C$, se tiene que $x \in B \cup C$ y de aqui $x \in A \cap (B \cup C)$. El caso $x \in A \cap C$ es análogo. por tanto

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

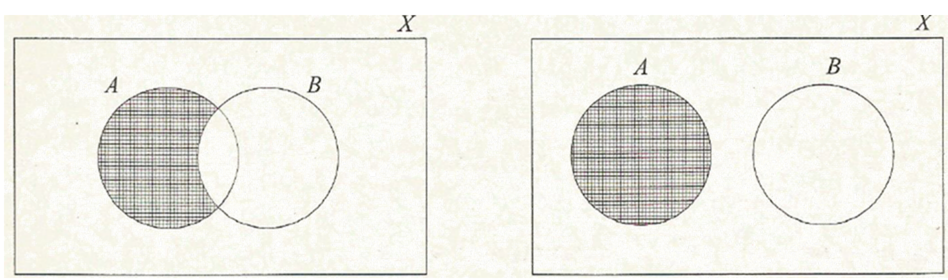
$\square$

Definición 5. *Sean A,B conjuntos. La diferencia de A y B es el conjunto*

$$A - B = \{x \mid x \in A \ y \ x \notin B\}$$

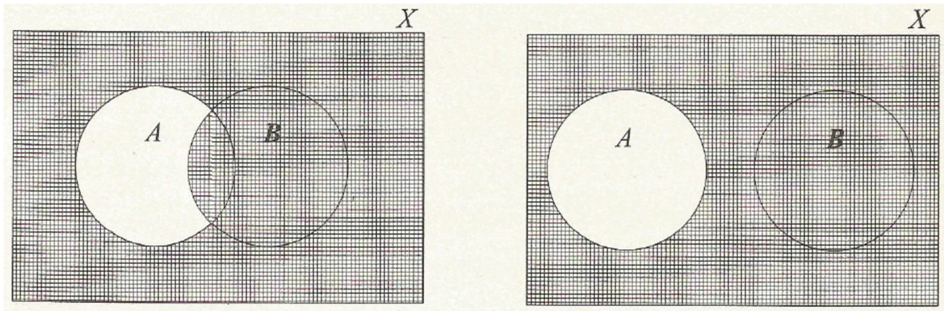
Según la definición, se tiene entonces que

$$x \in A - B \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in A \ \wedge \ x \notin B)$$



La negación sería

$$x \notin A - B \;\Leftrightarrow\; (x \notin A \;\vee\; x \in B)$$



Proposición 1. *Sean A y B conjuntos. Entonces*

a) $(A - B) \cap B = \emptyset$.

b) $A - B = A$ *si y sólo si* $A \cup B = \emptyset$

Demostración. a) Si $x \in (A-B) \cap B$, entonces $x \in A - B$ y $x \in B$. Pero eso significa que $x \notin B$ y $x \in B$, lo cual es imposible. Por lo tanto $(A - B) \cap B = \emptyset$

b) ($\Rightarrow$) Supongamos $A - B = A$. Entonces $A \cap B = (A - B) \cap B = \emptyset$, por el inciso anterior.
($\Leftarrow$) Supongamos que $A \cap B = \emptyset$. Tenemos que $A - B \subseteq A$, Así que basta demostrar que $A \subseteq A - B$ para tener la igualdad. Si $x \in A$, entonces, por ser $A \cap B = \emptyset$, se debe tener que $x \notin B$ y por consiguiente $x \in A - B$. Luego $(A - B) = A$

$\square$

Teorema 7. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Demostración. a) ($\subseteq$) $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$.
Sea $x \in A - (B \cup C)$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B \cup C$. Pero $x \notin B \cup C$ implica $x \notin B$ y $x \notin C$. Por lo tanto $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$, por lo que $x \in A - C$ y $x \in A - C$ y así $x \in (A - B) \cap (A - C)$.
($\supseteq$) Sea $x \in (A - B) \cap (A - C)$. Entonces $x \in A - B$ y $x \in A - C$ lo que significa que $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \in A$ y $x \notin C$, que es $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \notin C$. Como $x \notin B$ y $x \notin C$ implica que $x \notin B \cup C$, entonces $x \in A$ y $x \notin B \cup C$. Por lo tanto $x \in A - (B \cup C)$

$\square$

Operaciones entre conjuntos generalizadas

Dados los conjuntos A, B *y* C, podemos deducir que $A \cap B \cap C$ es el siguiente conjunto

$$\{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$$

Si renombramos a los conjuntos A, B y C como A_1, A_2, A_3, se puede verificar que entonces

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x \mid \forall\ i\ \in \{1,2,3\}, x \in A_i\}$$

Así, podemos generalizar la operación intersección de la siguiente manera: si I es, por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ y cada $i \in I$ tenemos un conjunto A_i, entonces

$$A_1 \cap ... \cap A_n = \{x \mid \forall\ i\ \in I, x \in A_i\}$$

Definición 6. *Sea I un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sea A_i su conjunto. Definimos la intersección del conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$, denotada como*

$$\bigcap\{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i$$

de la siguiente forma

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall\ i \in I,\ x \in A_i\}$$

Ejemplo Teneoms que

$$\bigcap\left\{\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)\ \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = [0,1]$$

Dados los conjuntos A, B y C, podemos deducir que $A \cup B \cup C$ es el siguiente conjunto

$$\{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

Si renombramos a los conjuntos A, B y C como A_1, A_2, A_3, se puede verificar que entonces

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x \mid \exists\ i\ \in \{1,2,3\}, x \in A_i\}$$

Así, podemos generalizar la operación unión de la siguiente manera: si I es, por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ y cada $i \in I$ tenemos un conjunto A_i, entonces

$$A_1 \cup ... \cup A_n = \{x \mid \exists\ i\ \in I, x \in A_i\}$$

Definición 7. *Sea I un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sea A_i su conjunto. Definimos la unión del conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$, denotada como*

$$\bigcup\{A_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

de la siguiente forma

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists\ i \in I,\ x \in A_i\}$$

Ejemplo Teneoms que

$$\bigcup\left\{\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)\ \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = (-1,2)$$

Teorema 8. *Álgebra de conjuntos generalizada. Dada el conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$ y un conjunto B cualquiera se tiene*

1. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$
2. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$
3. $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$
4. $B \cap \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$
5. $B - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B - A_i)$
6. $B - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B - A_i)$

Demostración. 1. Tenemos que

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow \neg\ \forall\ i \in I,\ x \in A_i \\ &\Leftrightarrow \exists\ i \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists\ i \in I,\ x \in A_i^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

2. Tenemos que

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow \neg\ \exists\ i \in I,\ x \in A_i \\ &\Leftrightarrow \forall\ i \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \forall\ i \in I,\ x \in A_i^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

3. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow x \in B \ \vee \ x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \vee \ \forall\, i \in I,\ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow \forall\, i \in I,\ x \in B \ \vee \ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow \forall\, i \in I,\ x \in B \cup A_i \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(B \cup A_i)
\end{aligned}$$

4. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow x \in B \ \wedge \ x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \wedge \ \exists\, i \in I,\ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow \exists\, i \in I,\ x \in B \ \wedge \ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow \exists\, i \in I,\ x \in B \cap A_i \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)
\end{aligned}$$

5. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in B - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow x \in B \ \wedge \ x \notin \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \wedge \ \neg\, \forall\, i \in I,\ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \wedge \ \exists\, i \in I,\ x \notin A_i \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \wedge \ \exists\, i \in I,\ x \in A_i^c \\
&\Leftrightarrow \exists\, i \in I,\ x \in B \wedge A_i^c \\
&\Leftrightarrow \exists\, i \in I,\ x \in B \cap A_i^c \\
&\Leftrightarrow \exists\, i \in I,\ x \in B - A_i \\
&\Leftrightarrow \ x \in \bigcup_{i\in I}(B - A_i)
\end{aligned}$$

□