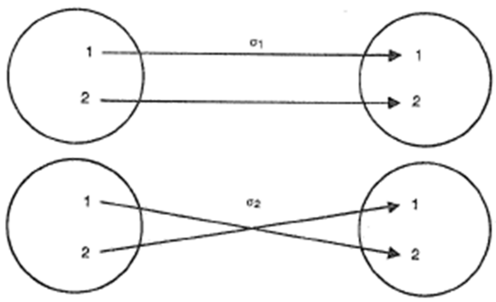
Permutaciones

Considérese el conjunto de números $\{1, 2, ..., n\}$. Una permutación de este conjunto no es más que una determinada ordenación de sus elementos.

Definición 1. *Se llama permutación del conjunto* $S = \{1, 2, ..., n\}$ *a una función biyectiva* $\sigma : S \to S$.

Ejemplo Si $S\{1, 2\}$ existen dos funciones biyectivas σ_1 y σ_2 de S en si mismo



Ejemplo Para el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ se tienen las siguientes permutaciones

$$\begin{gathered}(1,2,3)\\(1,3,2)\\(2,1,3)\\(2,3,1)\\(3,1,2)\\(3,2,1)\end{gathered}$$

Ejemplo Para el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$ se puede escribir

$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	$\sigma(4)$
1	2	3	4
		4	3
	3	2	4
		4	2
	4	2	3
		3	2
2	1	3	4
		4	3
	3	1	4
		4	1
	4	1	3
		3	1
3	1	2	4
		4	2
	2	1	4
		4	1
	4	1	2
		2	1
4	1	2	3
		3	2
	2	1	3
		3	1
	3	1	2
		2	1

Se tienen, entonces, las 24 permutaciones de $S = \{1, 2, 3, 4\}$ siguientes

$$\begin{array}{cccc}
(1,2,3,4) & (2,1,3,4) & (3,1,2,4) & (4,1,2,3)\\
(1,2,4,3) & (2,1,4,3) & (3,1,4,2) & (4,1,3,2)\\
(1,3,2,4) & (2,3,1,4) & (3,2,1,4) & (4,2,1,3)\\
(1,3,4,2) & (2,3,4,1) & (3,2,4,1) & (4,2,3,1)\\
(1,4,2,3) & (2,4,1,3) & (3,4,1,2) & (4,3,1,2)\\
(1,4,3,2) & (2,4,3,1) & (3,4,2,1) & (4,3,2,1)
\end{array}$$

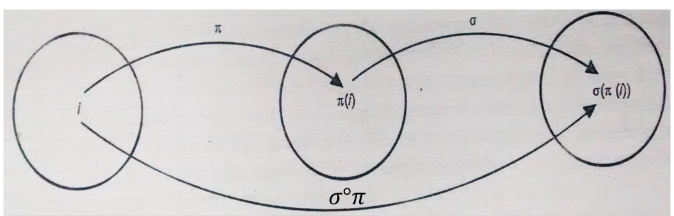
En general para el conjunto $S = \{1, 2, ..., n\}$ se tiene que

$$\begin{array}{c}
\sigma(1) \;\; \textit{tiene } n \textit{ posibilidades}\\
\sigma(2) \;\; \textit{tiene } n-1 \textit{ posibilidades}\\
\sigma(3) \;\; \textit{tiene } n-2 \textit{ posibilidades}\\
\vdots
\end{array}$$

Se pueden construir $n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$ diferentes de permutaciones de este conjunto.
Ahora bien como funciones que son las permutaciones, se pueden componer: Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\sigma,\ \pi : S \to S$ dos permutaciones cualesquiera. La composición $\sigma \circ \pi : S \to S$ es también una permutación definida por

$$(\sigma \circ \pi)(i) = \sigma(\pi(i)), \quad i = 1, ..., n$$

esquemáticamente



o bien

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(i) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(i) & \cdots & \pi(n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\sigma\circ\pi)(1) & (\sigma\circ\pi)(2) & \cdots & (\sigma\circ\pi)(i) & \cdots & (\sigma\circ\pi)(n) \end{pmatrix}$$

Ejemplo Por ejemplo

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

También dado que una permutación σ es una función biyectiva, se puede hablar de su inversa σ^{-1}, definida como la permutación σ^{-1} tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id$$

donde id denota la permutación identidad $(1, 2, ..., n)$.

Ejemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Definición 2. *Sea σ una permutación del conjunto $S = \{1, 2, ..., n\}$. Se dice que posee una inversión relativa al par de números $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, si ocurre $i < j$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$.*

Ejemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene una inversión, pues $1 < 2$ y $\sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(2)$.

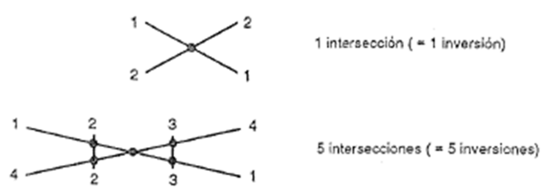
Ejemplo La permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene 5 inversiones

$$\begin{array}{l} 1 < 2 \;\; y \;\; \sigma(1) = 4 > 2 = \sigma(2) \\ 1 < 3 \;\; y \;\; \sigma(1) = 4 > 3 = \sigma(3) \\ 1 < 4 \;\; y \;\; \sigma(1) = 4 > 1 = \sigma(4) \\ 2 < 4 \;\; y \;\; \sigma(2) = 2 > 1 = \sigma(4) \\ 3 < 4 \;\; y \;\; \sigma(3) = 3 > 1 = \sigma(4) \end{array}$$

Una manera sencilla de contar las inversiones de una permutación está dada por la siguiente regla: escriba en una línea los elementos del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ y debajo de ella los valores de la permutación $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$. Una con trazos los elementos correspondientes y cuente el número de intersecciones que ocurrieron en los trazos realizados.
Para los ejemplos anteriores se tiene



Definición 3. *Sea σ una permutación del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Sea k_σ = número de inversiones de σ. Si k_σ es par, se dice que la permutación σ es par, caso contrario, se dice que es una permutación impar.*

Definición 4. *Se define el signo de la permutación σ, denotado por sgn σ como*

$$sgn\ \sigma = (-1)^{k_\sigma}$$

Por lo tanto si σ es una permutación par, $sgn\ \sigma = 1$, caso contario, si σ es una permutación impar, $sgn\ \sigma = -11$

Ejemplo Considere, por ejemplo, las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$.

PERMUTACION	*INVERSIONES*	*TIPO*	*SIGNO*
$(1, 2, 3)$	0	*par*	1
$(2, 3, 1)$	2	*par*	1
$(3, 1, 2)$	2	*par*	1
$(1, 3, 2)$	1	*impar*	-1
$(2, 1, 3)$	1	*impar*	-1
$(3, 2, 1)$	3	*impar*	-1

Queremos ver ahora que ocurre con el signo de una composición de permutaciones y como esta relacionado el signo de la composición con el signo de cada permutación componente

Ejemplo Sean σ, π las permutaciones

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene:

número de inversiones en $\sigma = 3$. Entonces $sgn\ \sigma = -1$
número de inversiones en $\pi = 2$. Entonces $sgn\ \pi = 1$

Para las composiciones se tiene

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene:

número de inversiones en $\pi \circ \sigma = 1$. Entonces $sgn\ \pi \circ \sigma = -1$
número de inversiones en $\sigma \circ \pi = 5$. Entonces $sgn\ \sigma \circ \pi = -1$

Observe que tanto $sgn\ \pi \circ \sigma$ y $sgn\ \sigma \circ \pi$ como el producto $(sgn\ \sigma)(sgn\ \pi)$ valen -1.

Teorema 1. *Sean σ, π dos permutaciones del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Entonces*

$$sgn\ \pi \circ \sigma = (sgn\ \sigma)(sgn\ \pi) = sgn\ \sigma \circ \pi$$

Demostración. Vamos a considerar los siguientes casos

CASO	ORDEN RELATIVO	CONCLUSIÓN
1	$i < j$ $\pi(i) < \pi(j)$ $\sigma(\pi(i)) < \sigma(\pi(j))$	*No hay inversión para* π *No hay inversión para* σ *No hay inversión para* $\sigma \circ \pi$
2	$i < j$ $\pi(i) < \pi(j)$ $\sigma(\pi(i)) > \sigma(\pi(j))$	*No hay inversión para* π *Hay inversión para* σ *Hay inversión para* $\sigma \circ \pi$
3	$i < j$ $\pi(i) > \pi(j)$ $\sigma(\pi(i)) < \sigma(\pi(j))$	*Hay inversión para* π *Hay inversión para* σ *No hay inversión para* $\sigma \circ \pi$
4	$i < j$ $\pi(i) > \pi(j)$ $\sigma(\pi(i)) > \sigma(\pi(j))$	*Hay inversión para* π *No hay inversión para* σ *Hay inversión para* $\sigma \circ \pi$

Llamemos $k_{\sigma\circ\pi}$, k_σ y k_π a los correspondientes números de inversiones en $\sigma \circ \pi$, σ y π.
Obsérvese que cuando hay una inversión en $\sigma \circ \pi$, entonces hay una inversión en σ o en π (casos 2 y 4 respectivamente). Por lo tanto

$$k_{\sigma\circ\pi} = k_\sigma + k_\pi - 2r$$

donde r es el número de veces en los que hay inversiones en σ y en π simultaneamente (caso 3). Entonces

$$\begin{aligned} sgn\ \sigma \circ \pi &= (-1)^{k_{\sigma\circ\pi}} \\ &= (-1)^{k_\sigma + k_\pi - 2r} \\ &= (-1)^{k_\sigma}(-1)^{k_\pi}(-1)^{-2r} \\ &= (-1)^{k_\sigma}(-1)^{k_\pi} \\ &= (sgn\ \sigma)(sgn\ \pi) \end{aligned}$$

□

Corolario 1. *Sea σ una permutación del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Entonces*

$$sgn\ \sigma = sgn\ \sigma^{-1}$$

Demostración. Como $\sigma \circ \sigma^{-1} = Id$ se tiene

$$sgn\ \sigma \circ \sigma^{-1} = (sgn\ \sigma)\ (sgn \sigma^{-1}) = 1$$

pues $(sgn\ Id = (-1)^0 = 1)$. Entonces

$$sgn\ \sigma = sgn\ \sigma^{-1}$$

□

Determinantes

Sea A la matriz cuadrada de orden 2 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de A, denotado det A, se escribe

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ahora bien dadas las permutaciónes del conjunto $\{1,2\}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos expresar el determinante de la siguiente forma

$$|A| = a_{1\ \sigma_1(1)}a_{2\ \sigma_1(2)} - a_{1\ \sigma_2(1)}a_{2\ \sigma_2(2)} = \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma}a_{1\sigma(1)}a_{1\sigma(1)}$$

Sea A la matriz cuadrada de orden 3 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El determinante de A, denotado det A, se escribe

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ahora bien dadas las permutaciónes del conjunto $\{1,2,3\}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos expresar el determinante de la siguiente forma

$$|A| = a_{1\ \sigma_1(1)}a_{2\ \sigma_1(2)}a_{3\ \sigma_1(3)} - a_{1\ \sigma_2(1)}a_{2\ \sigma_2(2)}a_{3\ \sigma_2(3)} - a_{1\ \sigma_3(1)}a_{2\ \sigma_3(2)}a_{3\ \sigma_3(3)} + a_{1\ \sigma_4(1)}a_{2\ \sigma_4(2)}a_{3\ \sigma_4(3)} +$$

$$a_{1\ \sigma_5(1)}a_{2\ \sigma_5(2)}a_{3\ \sigma_5(3)} - a_{1\ \sigma_6(1)}a_{2\ \sigma_6(2)}a_{3\ \sigma_6(3)} = \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma}a_{1\ \sigma(1)}a_{2\ \sigma(2)}a_{3\ \sigma(3)}$$

Sea A la matriz cuadrada de orden n siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El determinante de A, denotado det A, está definido por la fórmula

$$\det\ A = \sum_{\sigma} (-1)^{k_\sigma} a_{1\ \sigma(1)} a_{2\ \sigma(2)} \cdots a_{n\ \sigma(n)}$$

donde cada suma se hace sobre las $n!$ permutaciones del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$