Propiedades del Determinante

1. Sea A una matriz de orden n. Entonces

$$\det\ A = \det\ A^t$$

Demostración. Sea $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ la matriz transpuesta de $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Es decir $b_{ij} = a_{ji},\quad i,j = 1,...,n$. Entonces

$$\det\ A^t = \det\ B = \sum_{\pi}(sgn\ \pi)b_{1\pi(1)}b_{2\pi(2)}\cdots b_{n\pi(n)}$$

Sea $j = \pi(i)$. Entonces $\pi^{-1}(j) = i$ y se puede escribir

$$b_{1\pi(1)}b_{2\pi(2)}\cdots b_{n\pi(n)} = b_{\pi^{-1}(1)(1)}b_{\pi^{-1}(2)(2)}\cdots b_{\pi^{-1}(n)(n)}$$

sabemos también que

$$sgn\ \pi = sgn\ \pi^{-1}$$

por lo tanto

$$\det\ B = \sum_{\pi}(sgn\ \pi)b_{1\pi(1)}b_{2\pi(2)}\cdots b_{n\pi(n)} = \det\ B = \sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1})b_{\pi^{-1}(1)(1)}b_{\pi^{-1}(2)(2)}\cdots b_{\pi^{-1}(n)(n)}$$

al ser $b_{ij} = a_{ji},\quad i,j = 1,...,n$ se tiene

$$\sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1})b_{\pi^{-1}(1)(1)}b_{\pi^{-1}(2)(2)}\cdots b_{\pi^{-1}(n)(n)} = \sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1})a_{(1)\pi^{-1}(1)}a_{(2)\pi^{-1}(2)}\cdots a_{(n)\pi^{-1}(n)}$$

Ahora bien, cada permutación σ del conjunto $\{1,2,...,n\}$ es la inversa de alguna permutación de este conjunto, tomamos entonces $\sigma = \pi^{-1}$ tenemos entonces

$$\sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1})a_{(1)\pi^{-1}(1)}a_{(2)\pi^{-1}(2)}\cdots a_{(n)\pi^{-1}(n)} = \sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1})a_{(1)\sigma(1)}a_{(2)\sigma(2)}\cdots a_{(n)\sigma(n)}$$
$$= \det\ A$$

□

2. Se dice que la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ es una matriz triangular superior (triangular inferior) si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ($a_{ij} = 0$ para $i < j$ respectivamente). Se cumple entonces

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Demostración. Sea σ una permutación del conjunto $\{1,2,...,n\}$ Si para algún $j \in \{1,2,...,n\}$ ocurre $\sigma(j) \neq j$, entonces debe existir $i \in \{1,2,...,n\}$ tal que $i > \sigma(i)$. En tal caso $a_{i\sigma(i)} = 0$. Siendo el único producto que no es cero donde $\sigma(i) = i$ para toda i. Se trata, de la permutación identidad para la cual $sgn\ \sigma = 1$. Entonces

$$\det\ A = \sum_{\sigma}(sgn\ \sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

y como la transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior según el resultado anterior, tambien ocurre

$$\det\ A^t = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

□

3. Sean $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Supóngase que para alguna $r \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene $c_{rj} = a_{rj} + b_{rj}$, mientras que si $i \neq r$, $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$. Entonces

$$\det\ C = \det\ A + \det\ B$$

Demostración. Tenemos que

$$\det\ C = \sum_{\sigma}(sgn\ \sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots c_{r\sigma(r)}\cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma}(sgn\ \sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots(a_{r\sigma(r)} + b_{r\sigma(r)})\cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma}(sgn\ \sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots a_{r\sigma(r)}\cdots c_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma}(sgn\ \sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots b_{r\sigma(r)}\cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma}(sgn\ \sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{r\sigma(r)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma}(sgn\ \sigma)b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{r\sigma(r)}\cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$\det\ A + \det\ B$$

□