Operaciones elementales y determinantes

Teorema 1. *Si A' es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos de sus líneas entonces*

$$\det\ A' = -\det\ A$$

Demostración. Sea $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Supóngase que A' se obtuvo de A intercambiando en ésta las líneas p y q. Entonces si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ se tiene

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} \quad si \quad i \neq p,q \\ a'_{pj} &= a_{qj} \\ a'_{qj} &= a_{pj} \end{aligned}$$

Se tiene por lo tanto

$$\det\ A' = \sum_{\sigma} (sgn\ \sigma) a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \cdots a'_{p\sigma(p)} \cdots a'_{q\sigma(q)} \cdots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} (sgn\ \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{q\sigma(p)} \cdots a_{p\sigma(q)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

La permutación sigma se comporta

$$\det\ A' = \sum_{\sigma} sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(p) & \cdots & \sigma(q) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{q\sigma(p)} \cdots a_{p\sigma(q)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

donde

$$\det\ A' = \sum_{\sigma} sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \boxed{\begin{matrix} p \\ \sigma(p) \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} q \\ \sigma(q) \end{matrix}} & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & & \cdots & & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{q\sigma(p)} \cdots a_{p\sigma(q)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

y debería comportarse

$$\det\ A = \sum_{\pi} sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(p) & \cdots & \pi(q) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} a_{1\pi(1)} \cdots a_{q\pi(q)} \cdots a_{p\pi(p)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$\det\ A = \sum_{\pi} sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \boxed{\begin{matrix} p \\ \pi(p) \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} q \\ \pi(q) \end{matrix}} & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & & \cdots & & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} a_{1\pi(1)} \cdots a_{q\pi(q)} \cdots a_{p\pi(p)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Definimos la transposición

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \\ 1 & \cdots & q & \cdots & p & \cdots & n \end{pmatrix}$$

entonces $\pi = \sigma \circ \tau$ es la permutación

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \\ \pi(1) & \cdots & \pi(q) & \cdots & \pi(p) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Además, $sgn\ \pi = sgn(\sigma \circ \tau) = -sgn\ \sigma$. Entonces

$$\det\ A = \sum_{\pi} (sgn\ \pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{q\pi(q)} \cdots a_{p\pi(p)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$= -\sum_{\sigma} (sgn\ \pi) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{q\sigma(p)} \cdots a_{p\sigma(q)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$-\det\ A'$$

□

Corolario 1. *Si A es una matriz de orden n, que posee dos líneas iguales, entonces*

$$\det\ A = 0$$

Demostración. Supóngase que A es una matriz de orden n que tiene las líneas p y q iguales. Sea A' la matriz que se obtiene de A intercambiando las líneas p y q.
Se debe cumplir $A = A'$. Pero según el resultado anterior

$$\det\ A' = -\det\ A$$

por lo tanto

$$\det\ A = 0$$

□

Teorema 2. *Sea A' la matriz que se ha obtenido de A multiplicando una de sus líneas por la constante c. Entonces*

$$\det\ A' = c\ \det\ A$$

Demostración. Sea $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Supongamos que la línea r de A fue multiplicada por c para obtener A'. Entonces

$$\begin{array}{lll} a'_{ij} = a_{ij} & si & i \neq r \\ a'_{ij} = ca_{rj} & si & i = r \end{array}$$

Se tiene entonces

$$\det\ A' = \sum_{\pi} (sgn\ \pi) a'_{1\pi(1)} \cdots a'_{r\pi(r)} \cdots a'_{n\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi} (sgn\ \pi) a_{1\pi(1)} \cdots c a_{r\pi(r)} \cdots a_{n\pi(n)}$$
$$= c \sum_{\pi} (sgn\ \pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{r\pi(r)} \cdots a_{n\pi(n)}$$
$$c \det\ A$$

□

Teorema 3. *Sea A' la matriz que se obtiene de A sustituyendo su r-ésima línea por ella mas k veces su s-ésima línea. Entonces*

$$\det\ A' = \det\ A$$

Demostración. Sea $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ la matriz tal que

$$\begin{array}{rl} b_{ij} = a_{ij} & si \quad i \neq r \\ b_{rj} = k a_{sj} & si \quad i = r \end{array}$$

Sea $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ la matriz tal que

$$\begin{array}{rl} a'_{ij} = a_{ij} = b_{ij} & si \quad i \neq r \\ a'_{rj} = a_{rj} + k a_{sj} = a_{rj} + b_{rj} & si \quad i = r \end{array}$$

según resultados anteriores

$$\det\ A' = \det\ A + \det\ B$$

por otro lado

$$\det\ B = k \det\ \widetilde{A}$$

donde $\widetilde{A}$ es la matriz que tiene sus líneas r y s iguales, y por tanto, $\det\ \widetilde{A} = 0$ es decir $\det\ B = 0$. Por tanto

$$\det\ A' = \det\ A$$

□

En resumen se tiene

OPERACIÓN	EFECTO EN $\det\ A$
Intercambio de líneas en A	$\det\ A' = -\det\ A$
Multiplicar una línea por una constante c	$\det\ A' = c \det\ A$
Sustituir una línea por ella misma más un multiplo de otra	$\det\ A' = \det\ A$

También se ha probado que el determinante de una matriz cuadrada A es igual al determinante de su matriz transpuesta A'. Por lo que toda propiedad de los determinantes relacionada con las líneas de una matriz sigue siendo válida si en lugar de las líneas de la matriz se consideran sus columnas (pues las columnas de la matriz son las líneas de la matriz transpuesta, y el determinante no se ve afectado por este cambio).