

El Determinante de un Producto de Matrices

Ejemplo Considérese las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Se tiene que

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 34, \quad \det B = \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -43$$

Mientras que

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 101 \\ 38 & 88 \end{bmatrix}$$

Lo que implica

$$\det (AB) = \begin{vmatrix} 27 & 101 \\ 38 & 88 \end{vmatrix} - 1462 = (34)(-43) = (\det A)(\det B)$$

En general, si se multiplican dos matrices cuadradas A y B y se calcula el determinante del producto AB, lo que dará por resultado el producto de los determinantes de A y B, es decir

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Lema 1. (i) Si E es una matriz elemental que provino de I_n intercambiando en ésta dos de sus líneas, entonces

$$\det E = -1$$

(ii) Si E es una matriz elemental que provino de I_n multiplicando en ésta una de sus líneas por por c, entonces

$$\det E = c$$

(iii) Si E es una matriz elemental que provino de I_n sustituyendo en ésta una de sus líneas por ella misma más un múltiplo de otra línea, entonces

$$\det E = 1$$

Lema 2. Sea A una matriz de orden n y sea E una matriz elemental. Entonces

$$\det(EA) = (\det E)(\det A)$$

Demostración. Si A' es la matriz que se obtiene de A realizando en esta una operación elemental, entonces según lo anterior $A' = EA$, donde E es la matriz elemental que provino de I_n realizando en ésta la misma operación elemental. Entonces

1. Si E es una matriz elemental que provino de I_n intercambiando en ésta dos de sus líneas, entonces

$$\det E = -1$$

Por lo que

$$\det(EA) = \det A' = -\det A = (\det E)(\det A)$$

2. Si E es una matriz elemental que provino de I_n multiplicando en ésta una de sus líneas por c , entonces

$$\det E = c$$

Por lo que

$$\det(EA) = \det A' = c \det A = (\det E)(\det A)$$

3. Si E es una matriz elemental que provino de I_n sustituyendo en ésta una de sus líneas por ella misma más un múltiplo de otra línea, entonces

$$\det E = 1$$

Por lo que

$$\det(EA) = \det A' = 1 \det A = (\det E)(\det A)$$

□

Teorema 1. Sean A y B dos matrices cuadradas. Entonces

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Demostración. 1. Caso 1. A es una matriz no invertible

Supongamos que AB es una matriz invertible. En tal caso existiría una matriz C tal que $(AB)C = I_n$. Pero esta última expresión nos dice que A es invertible pues $A^{-1} = BC$ lo cual es una contradicción. Si $\det A = 0$ entonces $\det(AB) = 0$ y por tanto

$$\det(AB) = 0 = 0 \cdot (\det B) = (\det A)(\det B)$$

2. A es una matriz invertible

Tenemos entonces que la matriz A se puede escribir como el producto de matrices elementales

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 E_2 \cdots E_k B) \underbrace{=}_{\text{lema 2}} (\det E_1) \det(E_2 \cdots E_k B) \\ &\underbrace{=}_{\text{lema 2}} (\det E_1)(\det E_2) \det(E_3 \cdots E_k B) \\ &= \cdots = (\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det E_k)(\det B) \end{aligned}$$

Usando que

$$(\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det E_k) = \det A$$

se tiene

$$(\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det E_k)(\det B) = (\det A)(\det B)$$

□

Corolario 1. La matriz A de orden n es invertible si, y solo si

$$\det A \neq 0$$

Demostración. Probaremos el solo si. Supóngase que A es inversible. Entonces existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Por tanto,

$$\det(AA^{-1}) = \det I = 1$$

por lo tanto

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1$$

o sea, que $\det A$ es un factor de un producto que da por resultado 1. Entonces $\det A \neq 0$ □

Corolario 2. *Si A es una matriz inversible*

$$(\det A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Demostración. Según el corolario anterior

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1$$

por lo tanto

$$(\det A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

□