Desarrollo por cofactores

Considérese la matriz de orden 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ya hemos visto que

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Al reescribir esta expresión factorizando los elementos de la primera línea de A se tiene

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \tag{1}$$

Obsérvese que las expresiones entre paréntesis tienen un gran parecido al valor del determinante de una matriz de orden 2.
De hecho

$$coeficiente\ de\ a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$coeficiente\ de\ a_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} = -\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$coeficiente\ de\ a_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Introducimos la notación

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A(1,2) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A(1,3) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Entonces (1) puede escribirse como

$$\det A = a_{11} \det A(1,1) - a_{12} \det A(1,2) + a_{13} \det A(1,3) \tag{2}$$

Más aún, observese que $A(1,1)$ la matriz cuyo determinante es el coeficiente de a_{11} en $\det A$ es la submatriz que se obtiene de A borrando de ella la primera línea y la primera columna (que es precisamente la línea y la columna a la que pertenece el elemento a_{11}), o sea,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A(1,1) = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Similarmente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A(1,2) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A(1,3) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

La fórmula (2) que establece el valor del determinante de A con los elementos de la primera línea A factorizados se llama desarrollo por cofactores del determinante de A respecto de su primera línea.

Ejemplo Si A es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Se tiene que aplicando la fórmula 2

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \ \det \ A(1,1) - 3 \ \det \ A(1,2) + 5 \ \det \ A(1,3) \\ &= 2 \ \det \ \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} - 3 \ \det \ \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + 5 \ \det \ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= 2(46) - 3(13) + 5(-18) = -37 \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Al reescribir esta expresión factorizando los elementos de la segunda línea de A se tiene

$$a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})$$

Obsérvese que las expresiones entre paréntesis tienen un gran parecido al valor del determinante de una matriz de orden 2.
De hecho

$$coeficiente\ de\ a_{21} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} = -\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$coeficiente\ de\ a_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$coeficiente\ de\ a_{23} = a_{21} - a_{32}a_{22}a_{31} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Con la notación definida se tiene

$$A(2,1) = \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A(2,2) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A(2,3) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Entonces (1) puede escribirse como

$$\det A = -a_{21} \det A(2,1) + a_{22} \det A(2,2) - a_{23} \det A(2,3) \tag{3}$$

Con un desarrollo análogo sobre la tercera línea de la matriz A se tiene

$$\det A = a_{31} \det A(3,1) - a_{32} \det A(3,2) - a_{33} \det A(3,3) \tag{4}$$

El resultado que hemos probado es:

Proposición 1. *Sea A una matriz de orden 3. Sea $A(i,k)$ la submatriz de orden 2 que se obtiene de A eliminando en ésta su i-ésima línea y su k-ésima columna. Entonces*

$$\det\ A = \sum_{k=1}^{3}((-1)^{i+k}\ \det\ (A(i,k))a_{ik})$$

El resultado más general sería

Teorema 1. *Sea A una matriz de orden n. Sea $A(i,k)$ la submatriz de orden (n-1) que se obtiene de A eliminando en ésta su i-ésima línea y su k-ésima columna. Entonces*

$$\det\ A = \sum_{k=1}^{n}((-1)^{i+k}\ \det\ (A(i,k))a_{ik})$$

La adjunta de una matriz

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Se llamará C_{ij} al cofactor asociado al elemento a_{ij}. Se tiene

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\ \det\ A(1,1) = \det\ \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -13$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\ \det\ A(1,2) = -\det\ \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\ \det\ A(1,3) = \det\ \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 30$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\ \det\ A(2,1) = -\det\ \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\ \det\ A(2,2) = \det\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \text{ det } A(2,3) = -\text{det } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \text{ det } A(3,1) = \text{det } \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \text{ det } A(3,2) = -\text{det } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = 1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \text{ det } A(3,3) = \text{det } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = -37$$

En este caso de tiene

$$2\ C_{11} + 5\ C_{12} + C_{13} = 2(-13) + 5(-1) + 30 = -1 = \text{det } A$$

$$7\ C_{21} - \ C_{22} + 3\ C_{23} = 7(-1) - 0 + 3(2) = -1 = \text{det } A$$

$$2\ C_{31} + 4\ C_{32} + C_{33} = 2(16) + 4(1) - 37 = -1 = \text{det } A$$

Resulta que también el desarrollo por cofactores se aplica respecto a las columnas de A, en este caso

$$2\ C_{11} + 7\ C_{21} + 2\ C_{31} = 2(-13) + 7(-1) + 2(16) = -1 = \text{det } A$$

$$5\ C_{12} - \ C_{22} + 4\ C_{32} = 5(-1) - 0 + 4(1) = -1 = \text{det } A$$

$$C_{13} + 3\ C_{23} + C_{33} = 30 + 3(2) - 37 = -1 = \text{det } A$$

Ahora bien para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede formar la matriz de cofactores, que es este caso sería

$$A = \begin{bmatrix} -13 & -1 & 30 \\ -1 & 0 & 2 \\ 16 & 1 & -37 \end{bmatrix}$$

Definición 1. *Sea A una matriz de orden n. Se llama matriz adjunta de A, denotada adj A, a la traspuesta de la matriz de cofactores de A.*
En el caso del ejemplo se tiene

$$adj\ A = \begin{bmatrix} -13 & -1 & 16 \\ -1 & 0 & 1 \\ 30 & 2 & -37 \end{bmatrix}$$

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

y su matriz de cofactores

$$C = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

cuya adjunta será

$$adj\ A = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

y el producto

$$A \cdot adj\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det\ A & 0 & 0 \\ 0 & \det\ A & 0 \\ 0 & 0 & \det\ A \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces

$$A \cdot adj\ A = \det\ A\ I_3 \ \Rightarrow\ A \cdot adj\ A \left(\frac{1}{\det\ A} \right) = I_3$$

significa esto que

$$A^{-1} = adj\ A \left(\frac{1}{\det\ A} \right)$$

Para el caso general

Teorema 2. *Sea A una matriz de orden n. Sea $adj\ A$ su matriz adjunta. Entonces*

$$A \cdot adj\ A = \det\ A \cdot I_n$$

Corolario 1. *Si A es una matriz inversible, entonces*

$$A^{-1} = adj\ A \left(\frac{1}{\det\ A} \right)$$