La regla de Cramer

Considérese el sistema de n ecuaciones con n incognitas

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

o bien escrito matricialmente, $AX = B$, con $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, X la matriz de $n \times 1$ de elementos $x_i,\ i = 1, ..., n$ y B la matriz de $n \times 1$ de elementos $b_i,\ i = 1, ..., n$.
Supóngase que la matriz A es inversible. Tenemos entonces que

$$AX = B \ \Rightarrow \ X = A^{-1}B$$

por lo que

$$X = \frac{1}{\det\ A}(adj\ A)(B)$$

Realícese el producto $(adj\ A)(B)$.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ C_{13} & C_{23} & \cdots & C_{n3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1i} & C_{2i} & \cdots & C_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}b_1 + C_{21}b_2 + \cdots + C_{n1}b_n \\ C_{12}b_1 + C_{22}b_2 + \cdots + C_{n2}b_n \\ C_{13}b_1 + C_{23}b_2 + \cdots + C_{n3}b_n \\ \vdots \\ C_{1i}b_1 + C_{2i}b_2 + \cdots + C_{ni}b_n \\ \vdots \\ C_{1n}b_1 + C_{2n}b_2 + \cdots + C_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

El resultado será una matriz $n \times 1$ de elementos a_i, donde a_i se obtiene multiplicando la i-ésima línea de $adj\ A$ (=i-ésima columna de la matriz de cofactores de A) por la matriz B; es decir

$$a_i = C_{1i}b_1 + C_{2i}b_2 + \cdots + C_{ni}b_n \tag{1}$$

Considérese la matriz A_i de orden n cuyos elementos coinciden con los correspondientes de A, excepto en la i-ésima columna, en donde se han colocado los elementos de la matriz B. Es decir

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Calcúlese det A_i desarrollando por cofactores respecto de la i-ésima columna de A_i.
Obsérvese que los cofactores involucrados serán los mismos cofactores correspondientes a la matriz A (pues para su cálculo no se emplea la i-ésima columna de A, que es la única que difiere de A_i). Entonces

$$\det A_i = C_{1i}b_1 + C_{2i}b_2 + \cdots + C_{ni}b_n$$

Al comparar con (**??**) se ve pues que $a_i = \det\ A_i$, por lo que la solución del sistema es:

$$X = \frac{1}{\det\ A}(\det\ A_i)_{i=1,\dots,n}$$

o más explicitamente

$$x_i = \frac{\det\ A_i}{\det\ A} \quad i = 1, ..., n \tag{2}$$

La fórmula anterior da una solución explícita del sistema. Estas sólo seran aplicables en caso en el que la matriz del sistema sea inversible (esto es $\det\ A \neq 0$). Se tiene en ese caso el siguiente método para resolver el sistema $AX = B$: se calcula el determinante de A (que tiene que ser distinto de cero para poder aplicar el método), así como también los determinantes de las matrices A_i, las cuales se obtienen de A sustituyendo en ésta los elementos de su i-ésima columna por los elementos de la matriz de términos independientes B. La solución del sistema es

$$x_i = \frac{\det\ A_i}{\det\ A}$$

A este método se le conoce como regla de Cramer.

Ejemplo Suponga, por ejemplo, que se requiere resolver el sistema

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{gathered}$$

Este sistema se puede expresar como un producto de matrices

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{pmatrix}}_{B}$$

En este caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Matriz\ Cof\ (A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 \\ -6 & -11 & 7 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}, \quad Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Hacemos el producto $Adj\ A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 \\ -108 \\ -135 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\det\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -27 \quad \det\ A_1 = \begin{bmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -81$$

$$\det\ A_2 = \begin{bmatrix} 31 & 31 & 4 \\ 29 & 29 & 2 \\ 10 & 10 & 1 \end{bmatrix} = -108, \quad \det\ A_3 = \begin{bmatrix} 31 & 2 & 31 \\ 29 & 1 & 29 \\ 10 & - & 10 \end{bmatrix} = -135$$

Entonces

$$x_1 = \frac{\det\ A_1}{\det\ A} = \frac{-81}{-27} = 3, \quad x_2 = \frac{\det\ A_2}{\det\ A} = \frac{-108}{-27} = 4, \quad x_3 = \frac{\det\ A_3}{\det\ A} = \frac{-135}{-27} = 5$$