

Relaciones Funcionales

Sean A, B dos conjuntos no vacíos, que llamaremos dominio y contradominio respectivamente. Entendemos por función de A en B toda regla que hace corresponder a cada elemento del dominio (A) un único elemento del codominio (B).

Para denotar que f es una función de A en B , se escribe

$$f : A \rightarrow B$$

se lee **f es una función con dominio A y codominio B**

Definición 1. f es una función de A en B si y solo si f es una relación entre A y B tal que todo elemento de A tiene un único correspondiente en B

Ejemplo Sean A, B conjuntos dados por

$$A = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

y sea f la relación dada por $(x, y) \in f \Leftrightarrow y = x^2$
entonces se tiene que

$$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

ya que cada componente es el cuadrado de la primera. Tenemos que todo elemento del dominio (A) tiene un correspondiente en el codominio (B), y además tal correspondiente es único en el sentido de que no se tienen dos pares ordenados distintos con la misma primera componente por tanto f es una función de A en B .

Observación: Puede ocurrir que elementos distintos del dominio (A) les corresponda un mismo elemento en el codominio (B), como ocurre con $-1, 1$, cuyos elemento correspondiente en el contradominio (B) es 1 ; además puede ocurrir que elementos del contradominio (B) no tengan un correspondiente elemento en el dominio (A), como ocurre con $2, 3$

Definición 2. f es una función de A en B si y solo si f es un subconjunto de $A \times B$ que satisface las siguientes condiciones de existencia y unicidad

$$i) \quad \forall a \in A, \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in f$$

$$ii) \quad (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c$$

Si $(a, b) \in f$ decimos que $b \in B$ es el correspondiente de $a \in A$ y suele escribirse $b = f(a)$, es decir, b es el transformado de a por la función f .

Ejemplo Sean

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

determinar si la siguiente relación

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 1)\}$$

es función.

Solución Tenemos que se cumplen las condiciones de la definición, y resulta que f es una función tal que

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 2, \quad f(d) = 1$$

Ejemplo Sean

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

determinar si la siguiente relación

$$f = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$$

es función.

Solución Tenemos que no se cumple la condición i, ya que no todo elemento del dominio (A) tiene un correspondiente elemento en el codominio (B) pues d carece de elemento en el dominio (A).

También ii no se cumple pues un mismo elemento del dominio (A) tiene dos correspondientes en el codominio (B)

por lo tanto ésta relación f no es función

Funciones Inyectivas

Sea una función $f : A \rightarrow B$. Si ocurre que elementos distintos del dominio (A) tienen imágenes distintas en el codominio (B), entonces f se llama **función inyectiva, biunívoca, o uno a uno**

Definición 3. Una función $f : A \rightarrow B$ se dice que es inyectiva, biunívoca ó uno-uno si:

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad \text{tal que} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Equivalentemente, mediante la implicación contrarrecíproca, podemos decir Una función $f : A \rightarrow B$ se dice que es inyectiva, biunívoca ó uno-uno si:

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad \text{tal que} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 2x$.

Para ver que f es inyectiva

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore \quad f$ es inyectiva

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$

Para ver que f es inyectiva

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ es decir

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow (x_1^3 - x_2^3) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad \text{o} \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

Si $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Suponga ahora que

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = -x_1x_2 \Rightarrow x_1, x_2 \text{ tienen signo distintos (1)}$$

por otro lado

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1x_2 \geq 0$$

lo cual según (1) no puede ocurrir, por lo tanto $x_1 = x_2$

Otra forma de trabajar esta parte sería

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4x_2^2}}{2} = \frac{-x_2 \pm \sqrt{-3x_2^2}}{2}$$

por lo tanto

$$x_1 = x_2 \left(\frac{-1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Si $x_2 = 0$ entonces $x_1 = 0$ y resulta $x_1 = x_2$.

Estos son los únicos valores reales que satisfacen, y en consecuencia f es inyectiva

Ejemplo Considerese la $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + 1$, se tiene que, f es inyectiva pues si $x_1, x_2 \in \text{Dom}f$ son tales que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ejemplo Considerese la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$, se tiene que f es inyectiva pues para

$$x_1, x_2 \in \text{Dom}f \text{ tal que } x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2 \dots\dots\dots 1)$$

Y también se tiene que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} \neq \frac{1}{x_2 - 1} \dots\dots\dots 2)$$

$$\text{Por 1) y 2) } \frac{1}{x_1 - 1}(3x_1 - 1) \neq (3x_2 - 1)\frac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Función Suprayectiva

Sea una función $f : A \rightarrow B$. Si ocurre que todo elemento del codominio (B) es imagen de algún elemento del dominio (A), la función se llama suprayectiva, sobreyectiva

Definición 4. Una función $f : A \rightarrow B$ se dice que es suprayectiva si:

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad \text{tal que} \quad y = f(x)$$

en el caso de la sobreyectividad, el conjunto de las imagenes se identifica con el codominio (B) de la función

Ejemplo Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow y = -x + 1 \text{ p a } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$y \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \frac{y}{2} = x$$

\therefore

$$f(x) = f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\left(\frac{y}{2}\right) = y$$

por lo tanto f es suprayectiva,

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ es una función suprayectiva pues dado $b \in B$ tenemos que $f(a) = b$ por tanto $2a + 1 = b \Rightarrow a = \frac{b-1}{2} \quad \therefore f(a) = f\left(\frac{b-1}{2}\right) = 2\left(\frac{b-1}{2}\right) + 1 = b$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es también una función suprayectiva pues si $b \in B$ entonces $f(a) = b \quad \therefore a^3 = b \Rightarrow a = \sqrt[3]{b}$ y $f(a) = f(\sqrt[3]{b}) = (\sqrt[3]{b})^3 = b$

Función Biyectiva

Definición 5. Una función $f : A \rightarrow B$ se dice que es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva simultáneamente.

Ejemplo La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$ es biyectiva pues:

Es inyectiva ya que

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a \neq b \Rightarrow -a \neq -b \Rightarrow -a + 1 \neq -b + 1 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Es sobreyectiva pues

$$\forall y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow y = -x + 1 \text{ p a } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

por lo tanto al ser inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva