Composición de funciones inyectivas

Teorema 1. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva*

Demostración. sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ se tiene entonces que

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

como g es inyectiva se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva entonces $x_1 = x_2 \therefore g \circ f$ es inyectiva □

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones suprayectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva*

Demostración. Hay que probar que $\forall z \in C \; \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$, se tiene que por ser $g : B \to C$ sobre $\exists y \in B$ tal que $\forall z \in C \; g(y) = z$ dado que f es suprayectiva y $y \in B \; \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ por lo tanto $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Por lo tanto dado $z \in C \; \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$ □

Teorema 3. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es inyectiva entonces f es inyectiva*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ aplicando g se obtiene $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ por ser $g \circ f$ inyectiva se tiene $x_1 = x_2$ en consecuencia f es inyectiva □

Teorema 4. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva entonces g es suprayectiva*

Demostración. Sea $c \in C$ como $g \circ f$ es suprayectiva, existe α tal que

$$c = g \circ f(\alpha) = g(f(\alpha))$$

esto prueba que $c \in Im_g$ □

Teorema 5. *Sea f la función $f : A \to B$, entonces*
a) f es inyectiva si y solo si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$

Demostración. Sea f inyectiva. Para cada $y \in f(A)$ existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Sea $a \in A$ fijo definimos $g : B \to A$ asi

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si} \quad y \in f(A) \\ \\ a & \text{si} \quad y \notin f(A) \end{cases}$$

es claro que $(g \circ f)(y) = g(f(y)) = I_A$

□

Teorema 6. *Sea f la función $f : A \to B$, entonces*
a) f es suprayectiva si y solo si existe $h : B \to A$ tal que $f \circ h = I_B$

Demostración. Sea f suprayectiva. Para cada $y \subseteq B \; f^{-1}(y) \neq \emptyset$, para $y \subset B$ escogemos $x \in f^{-1}(y)$ y definimos la función $h : B \to A$ como $h(y) = x$ en consecuencia $f \circ h = I_B$ □