Función Inversa

Toda función $f : A \to B$ es una relación; cabe preguntarse si la relación inversa es una función. En general la respuesta es negativa.

Ejemplo Sean A, B conjuntos dados por

$$A = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

y $f : A \to B$ es tal que $f(x) = x^2$, se tiene entonces que

$$f = \{(-1, 1),\ (0, 0),\ (1, 1),\ (2, 4)\}$$

de manera que la inversa de esta relación es el subconjunto de $B \times A$

$$\{(1, -1),\ (0, 0),\ (1, 1),\ (4, 2)\}$$

como los elementos $2, 3 \in B$ carecen de imagenes en A, entonces esta relación no es función. Además no se cumple la condición de unicidad ya que el $1 \in B$ tiene dos corrrespondientes en A, a saber $-1, 1$

Ejemplo Sean A, B conjuntos dados por

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b, c\} \quad y \quad f = \{(1, a),\ (2, c),\ (3, b)\}$$

una función de A en B. La relación inversa es

$$g = \{(a, 1),\ (b, 3),\ (c, 2)\}$$

es claramente una función de B en A, llamada función inversa de f.
La composición

$$g \circ f = \{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3)\} = I_A$$

La función g se llama inversa izquierda de f La composición

$$f \circ g = \{(a, a),\ (b, b),\ (c, c)\} = I_B$$

La función g se llama inversa derecha de f

La función $f : A \to B$ admite inversa si y solo si existe $g : B \to A$ tal que

$$g \circ f = I_A \quad y \quad f \circ g = I_B$$

Si una función $f : A \to B$ tiene las dos inversas, entonces ambas coinciden

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

g=h se llama inversa de f.
Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2$ admite inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x - 2$ pues

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2) - 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = (x - 2) + 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$

Teorema 1. *Una función admite inversa si es biyectiva*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ aplicamos g y obtenemos

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \to (g \circ f)(x_1) = (g \circ f(x_2)) \to x_1 = x_2$$

$\therefore f$ es uno-uno
Para ver que es uprayectiva sea $y \in B$ aplicando la función identidad

$$y = Id_B(y) = f \circ g(y) \to y = f(g(y))$$

por lo tanto si hacemos $x = g(y) \in A$ se tien que $f(x) = y$ $\therefore$ al ser f inyectiva y suprayectiva entonces f es biyectiva $\square$

Teorema 2. *Una función que es biyectiva admite inversa*

Demostración. Definimos una función $g : B \to A$ mediante $g(y) = x$ si $f(x) = y$, tenemos que ver que g satisface la definición de función. En efecto todo elemento y del domino B tiene un correspondiente x en A, ya que, por se f sobreyectiva, todo y en B proviene de algún x en A. El correspondiente x asociado a y es único, por ser f inyectiva. En efecto si x_1, x_2 fueran distintos de y por f se tendría $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2) = y$, lo cual es absurdo pues f es inyectiva
Hay que ver que $g \circ f = Id_A$. Cualquiera que sea A se tiene

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = Id_A(x)$$

Ahora probaremos que $(f \circ g)(y) = Id_B$ se tiene que

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = Id_B(y)$$

Al tener inversa izquierda e inversa derecha entonces la función admite inversa y ademas es única pues si g' fuera inversa se tendría que

$$g' = g' \circ Id_B = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = Id_A \circ g = g$$

$\square$

Ejemplo.-Probar que la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ admite inversa para $x > -1$
Para ver que es inyectiva se tiene que dados $x_1 \neq x_2 \in Dom_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene entonces que

$$\frac{x_1}{1+x_2} = \frac{x_1}{1+x_2} \Rightarrow x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_2 + x_2 \cdot x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

por lo tanto f es inyectiva
Para ver que f es suprayectiva sea $y \in Im_f$ tenemos que ver que existe $x \in Dom_f$ tal que $f(x) = y$. Si $f(x) = y$ entonces

$$\frac{x}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

por lo tanto para $y \in Im_f$ se tiene que existe $x = \dfrac{y}{1-y} \in Dom_f$ tal que $f(x) = y$
Por tanto al ser f inyectiva y suprayectiva entonces f es biyectiva y por tanto admite una inversa