Números Naturales $\mathbb{N}$

Definir a los números naturales no es una tarea sencilla, la teoría de conjuntos nos dice que se puede dar una representación de los números naturales como sigue:
$0 = \emptyset$
$1 = \emptyset \bigcup \{0\} = \{\emptyset\}$
$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
$4 = \{0, 1, 2, 3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
$\vdots$
$s(n) = n \cup \{n\}$
$\vdots$
El conjunto de los números naturales lo denotamos $\mathbb{N}$ y tiene las siguientes características

a) Existe un primer número natural al que llamamos cero y denotamos como 0

b) En este conjunto se tiene la posibilidad de pasar de una manera precisa de cada elemento al que le sigue

c) En este conjunto se pueden definir operaciones binarias como suma y multiplicación

d) Se puede definir un orden

e) A partir del 0 se puede alcanzar cualquier número natural m dado de antemano mediante el proceso de tomar sucesores.

A ésta última característica se le conoce como principio de inducción completa. La idea es la siguiente: Sea $P(x)$ un predicado y supongamos que cada vez que damos un número natural n, $P(n)$ resulta verdadera. A partir de este hecho si podemos demostrar que $P(n+1)$ es verdadera. Entonces tendríamos
Si $P(0)$ es verdadera, entonces $P(1)$ es verdadera.
Si $P(1)$ es verdadera, entonces $P(2)$ es verdadera.
Si $P(2)$ es verdadera, entonces $P(3)$ es verdadera etc.
Intuitivamente podríamos concluir que $P(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Principio de Inducción Completa Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$

b) $n \in A$ implica que $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$
Principio del Buen Orden Si A es un subconjunto de números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo.

Teorema 1. *El principio del buen orden implica el principio de inducción*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{N}$ tal que
a) $0 \in A$
b) Si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$
Supongamos que $\mathbb{N} \neq A$

a) Consideremos el conjunto
$$B = \mathbb{N} \setminus A$$
el conjunto de números naturales que no están en A.

b) $B \neq \emptyset$. Si $A \neq \mathbb{N}$, entonces luego, por el Principio del Buen Orden, B tiene un elemento más pequeño, llamemosle n_0

c) Como $0 \in A$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $n_0 \neq 0$

d) Consideremos $n_0 - 1$ y tenemos que $n_0 - 1 \notin B$

e) Se debe tener $n_0 - 1 \in A$

f) Por hipótesis si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$ por lo que $n_0 - 1 + 1 \in A$ es decir $n_0 \in A$ (absurdo pues $n_0 \notin A$)

g) Debe ocurrir entonces $A = \mathbb{N}$

□

Teorema 2. *El principio de inducción implica el principio del buen orden*

Demostración. Sea A un subconjunto de números naturales, y supongamos que A no tiene elemento mínimo

1. $0 \notin A$ pues en caso contrario 0 sería elemento mínimo
2. Consideremos el conjunto
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < a, \ \forall \ a \in A\}$$
3. $0 \in B$ pues $0 < a, \quad \forall \ a \in A$
4. Sea $n \in B$. Queremos ver que $n + 1 \in B$
5. Supongamos que $n + 1 \notin B$. Esto significa que $\exists \ a_0 \in A$ y $a_0 \leq n + 1$
6. Por otro lado como $n < a \ \ \forall \ a \in A$ entonces $n + 1 \leq a_0 \ \forall \ a \in A$
7. De lo anterior $a_0 = n+1$ y por lo tanto a_0 sería el elemento mínimo de A esto contradice la hipótesis de que A no tiene primer elemento luego $n + 1 \in B$
8. Como B satisface las hipótesis del principio de inducción entonces $B = \mathbb{N}$ lo cual es absurdo pues
$$\emptyset \neq A = A \cap \mathbb{N} = A \cap B = \emptyset$$
Se concluye entonce que A tiene elemento mínimo

□