Números Naturales $\mathbb{N}$

Axiomas de Peano

a) El número 0 es un número natural

b) Si n es un número natural, entonces el sucesor de n denotado $s(n)$ también lo es

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $s(n) \neq 0$

d) Si m y n tienen el mismo sucesor entonces $m = n$

e) Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y cumple $0 \in A$, y que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ (n \in A\ \Rightarrow\ s(n) \in A)$$

entonces $\mathbb{N} \subseteq A$

Principio de Inducción Completa
Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$

b) $n \in A$ implica que $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$

Definición 1. *Definimos una operación binaria*
$m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*(suma) de la siguiente forma:*

a) $0 + m = m$

b) $m + (s(n)) = s(m + (n))$

Propiedades de las operaciones en los números naturales Asociatividad.
Para cualesquiera $a, b, n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$(a + b) + n = a + (b + n)$$

Demostración. Sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid (a + b) + n = a + (b + n)\}$$

a) $0 \in A$ pues

$$\begin{aligned}(a + b) + 0 &= a + b \\ &a + (b + 0)\end{aligned}$$

b) Suponemos que si $m \in A$, es decir

$$(a + b) + m = a + (b + m)$$

c) Queremos demostrar que $s(m) \in A$. En este caso

$$\begin{aligned}(a+b)+s(m) &= s((a+b)+m)\\ &= s(a+(b+m))\\ &= a+s(b+m)\\ &= a+(b+s(m))\end{aligned}$$

Por tanto $s(m) \in A$ y por el principio de inducción $A = \mathbb{N}$ □

Conmutatvidad Primero para $m \in \mathbb{N}$ fijo probaremos que

$$S(n)+m = n+S(m)$$

Demostración. a) El 0 cumple pues

$$\begin{aligned}s(0)+m &= s(0+m)\\ &= s(m)\\ &= 0+s(m)\end{aligned}$$

b) Luego suponiendo que es cierto para $n \in \mathbb{N}$,

$$S(n)+m = n+S(m)$$

c) dado que

$$\begin{aligned}S(S(n))+m &= S(S(n)+m)\\ &= S(n+S(m))\\ &= S(n)+S(m)\end{aligned}$$

la ecuación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora definimos el conjunto

$$A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m+n = n+m\}$$

a) $0 \in A_n$ pues

$$m+0 = m = 0+m$$

b) Suponemos que $m \in A_n$, es decir $m+n = n+m$

c) Si $m \in A_n$, entonces

$$S(m)+n = S(m+n) = S(n+m) = S(n)+m = n+S(m)$$

esto implica que $S(m) \in A_n$.

Entonces por el principio de inducción $A_n = \mathbb{N}$ □

Ejemplo Usando el principio de inducción, pruebe que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se umple

$$2^{n+4} < (n+4)!$$

Demostración. Definimos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{n+4} < (n+4)!\}$$

a) Tenemos que $0 \in A$ pues

$$2^{0+4} = 2^4 = 16 < 24 = 4! = (0+4)!$$

b) Suponemos que $n \in A$, es decir $2^{n+4} < (n+4)!$

c) A partir de la hipótesis de inducción (b) tenemos

$$2^{n+4} < (n+4)! \ \Rightarrow\ 2^{n+4}(2) < (n+4)!(n+5) \ \Rightarrow\ 2^{n+1+4} < (n+1+4)!$$

ya que $2 < n+5$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el principio de inducción tenemos $A = \mathbb{N}$

$\square$