Matrices

Definición 1. *Las matrices son arreglos rectangulares de números como el siguiente:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix}$$

Constituido por m renglones y n columnas. A los números reales a_{ij} con $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$ se les llama elementos de la matriz.
Se tiene entonces que a_{ij} es, pues, el elemento de la matriz que se encuentra en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna.
Se usarán letras mayusculas (A,B,C,...) para denotar matrices y minusculas $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ...$ para denotar sus elementos.

Definición 2. *Se define el orden como: el número de renglones $\times$ número de columnas.*

En general si la matriz tiene m renglones y n columnas decimos que su tamaño (orden) es $m \times n$.
Una matriz de $m \times n$ se escribe

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se suele denotar $M_{m\times n} = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

Ejemplo

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 3. *Si en $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ ocurre que $m = n$, se dice que A es una matriz cuadrada*

Se suelen denotar $A_{i\times i}$ con $i = 1, ..., n$ o también $A_{i\times j}$ con $i, j = 1, ..., n$

Ejemplo Tenemos las matrices

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición 4. *Dada una matriz cuadrada A de orden n, $A_{i\times j}$ con $i, j = 1, ..., n$ se dice que los elementos a_{ii} con $i = 1, ..., n$ constituyen la diagonal principal de la matriz*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix}$$

Definición 5. *Dada una matriz cuadrada A de orden n, $A_{i\times j}$ con $i,j=1,...,n$ en la que los elementos a_{ii} con $i=1,...,n$ de la diagonal principal de la matriz son unos y los elementos a_{ij} con $i,j=1,...,n$ e $i\neq j$ son ceros, se le conoce como la matriz identidad de orden n, y se denota I_n, así, por ejemplo*

$$I_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Definición 6. *Dada una matriz cuadrada A de orden n, $A_{i\times j}$ con $i=1,...,m$,$j=1,...,n$ en la que los elementos a_{ij} son ceros, se le conoce como la matriz cero de orden $m\times n$, y se denota $0_{m\times n}$, así, por ejemplo*

$$0_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad 0_{3\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad 0_{4\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Las operaciones entre matrices se definen asi:

Definición 7. *Para la suma se tiene que dadas las matrices*

$$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}},\quad B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

entonces

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

o bien

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}b_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

Observación: La suma de matrices se ha definido para matrices del mismo orden.

Definición 8. *Sea $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ y sea $k\in\mathbb{R}$ (un escalar). Se define el producto de la matriz A por el escalar k, denotado kA como la matriz $C=(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ donde $c_{ij}=ka_{ij}$, es decir,*

$$kA=(ka_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

o bien

$$k\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}$$

Teorema 1. *Sean A,B y C tres matrices cualesquiera del mismo orden* $(m\times n)$ *con elementos* a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, *respectivamente. Sean k,l dos escalares. Entonces*
(1) A+B=B+A

Demostración.

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=(b_{ij}+a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=B+A$$

□

(2) A+(B+C)=(A+B)+C

Demostración.

$$A+(B+C)=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=(A+B)+C$$

□

(3) Existe una matriz cero tal que $A+0=A$

Demostración.

$$A+0=(a_{ij}+0_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=A$$

□

(4) Dada la matriz A, existe una matriz $-A$ *tal que* $A+(-A)=0$ *(la matriz cero)*

Demostración.

$$A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=(0_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=0$$

□

(5) k(A+B)=kA+kB

Demostración.

$$k(A+B)=(k(a_{ij}+b_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=(ka_{ij}+kb_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=kA+kB$$

□

(6) (k+l)A=kA+lA

Demostración.

$$(k+l)A=((k+l)a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=(ka_{ij}+la_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=kA+lA$$

□

(7) (kl)A=k(lA)

Demostración.

$$(kl)A=((kl)a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=(k(la_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=k(lA)$$

□

(8) 1A=A

Demostración.

$$1A = (1a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = A$$

□