Operaciones con Matrices

Definición 1. *Sea A una matriz de orden $m \times p$ con elementos a_{ij} donde $i = 1, .., m$ y $j = 1, ..., p$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

Sea B una matriz de orden $p \times n$ con elementos b_{ij} donde $i = 1, .., p$ y $j = 1, ..., n$.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

Se define el producto de las matrices A y B, como la matriz de orden $m \times n$ con elementos c_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ dados por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

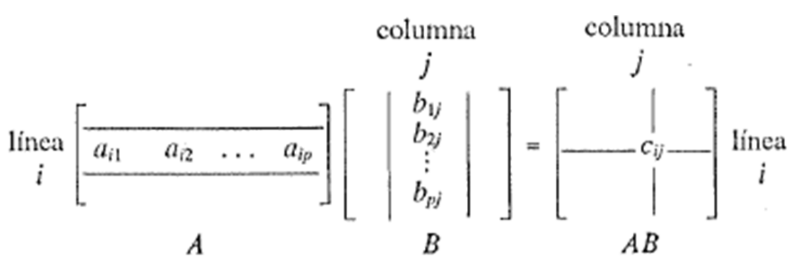
es decir

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}$$

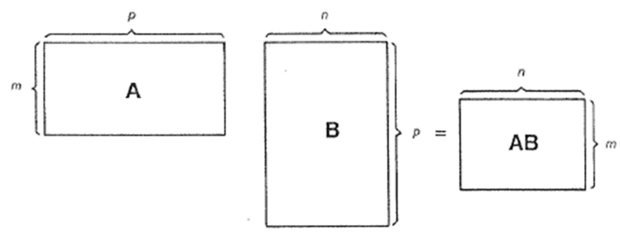
Más concretamente, el elemento del la i-ésima línea y j-ésima columna de AB se obtiene multiplicando el la i-ésima línea de A con la j-ésima columna de B.



donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Observación: El producto de matrices se ha definido solo en el caso de que el número de columnas de A coincida con el número de renglones de B, esquemáticamente se ve así



Ejemplo Considere las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5)+3(6) & 2(-2)+3(8) \\ 4(5)+(-1)(6) & 4(-2)+(-1)8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 & 20 \\ 14 & -16 \end{bmatrix}$$

Existen razones para definir el producto de matrices como se hizo, por ejemplo supóngase que se tiene el sistema de 3 ecuaciones con 4 incognitas

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{gathered}$$

cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

y se quieren cambiar las variables x_1, x_2, x_3, x_4 de este sistema por las nuevas variables y_1, y_2 relacionadas por

$$\begin{gathered} x_1 = 2y_1 + y_2 \\ x_2 = -y_1 + 3y_2 \\ x_3 = y_1 + y_2 \\ x_4 = 3y_1 - 2y_2 \end{gathered}$$

cuya matriz asociada es

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Al hacer las sustituciones requeridas se obtiene

$$\begin{gathered} (2y_1 + y_2) + 2(-y_1 + 3y_2) + 6(y_1 + y_2) - (3y_1 - 2y_2) = 0 \\ 2(2y_1 + y_2) - (-y_1 + 3y_2) + (y_1 + y_2) + (3y_1 - 2y_2) = 0 \\ 3(2y_1 + y_2) - 2(-y_1 + 3y_2) + 2(y_1 + y_2) - 3(3y_1 - 2y_2) = 0 \end{gathered}$$

o sea

$$\begin{aligned} 3y_1 + 15y_2 &= 0 \\ 9y_1 - 2y_2 &= 0 \\ y_1 + 5y_2 &= 0 \end{aligned}$$

cuya matriz asociada es

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 9 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Resulta que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 9 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = C$$

También relacionado con sistemas de ecuaciones, se puede ver que el producto de matrices tiene una gran ventaja para denotar matricialmente un sistema.
Considérese el sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ la matriz de $m \times n$ del sistema. Considérese también la matriz X de orden $n \times 1$ formada por las incognitas $x_1, x_2, ..., x_n$ y la matriz B de orden $m \times 1$ formada por los términos indepedietes $b_1, b_2, ..., b_m$.
Entonces el sistema se puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o sea

$$AX = B$$

Ejemplo El sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

se denota matricialmente como $AX = B$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$